NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur une surface du troisième ordre qui est l’analogue du cercle des neuf points

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 145-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__145_0>

[K13cβ]

SUR UNE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE QUI EST L'ANALOGUE DU CERCLE DES NEUF POINTS;

PAR M. G. FONTENÉ.

J'ai donné récemment dans ce Journal (1906, p. 55) un théorème relatif au triangle pédal d'un point S; ce théorème généralise la construction d'Hamilton pour le point de contact du cercle des neuf points et du cercle inscrit. On trouvera ici l'extension *partielle* de ce théorème au cas de l'espace; je n'ai pas réussi à obtenir une extension du théorème de Feuerbach.

Ces nouvelles recherches m'ont conduit à compléter le théorème de Géométrie plane. Je commencerai donc par rappeler l'énoncé de ce théorème, en écartant les faits que je n'ai pu généraliser, en indiquant des faits nouveaux qui ont leurs analogues dans l'espace.

I. — Géométrie plane.

1. Étant donné un triangle ABC, le lieu d'un point M dont les projections sur les trois côtés du triangle sont en ligne droite est le cercle circonscrit au triangle (*Simson*).

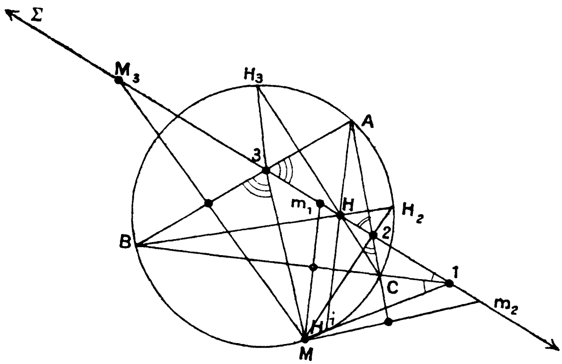
Si H est l'orthocentre du triangle, la droite de Simson du point M passe au milieu K de MH (*Steiner*).

Lorsque M décrit le cercle ABC, le lieu du point K est un cercle, homothétique au cercle ABC pour le centre d'homothétie H et le rapport $\frac{1}{2}$; le cercle qui s'introduit ainsi est le cercle des neuf points du triangle.

Les milieux des segments HA, HB, HC étant A'', B'', C'', ce cercle est le lieu d'un point K dont les projections sur les côtés du triangle $A''B''C''$ sont en ligne droite.

2. J'indiquerai encore pour le point M, relativement au triangle ABC, une construction que nous aurons l'occasion d'appliquer pour le point K, relativement au triangle $A''B''C''$. Les symétriques du point M par rapport aux trois côtés du triangle, soient M_1, M_2, M_3 (*fig.* 1), sont sur une droite parallèle à la droite de

Fig. 1.



Simson du point M et passant par le point H; nous appellerons cette droite la *droite de Steiner* du point M, et nous la désignerons par la lettre Σ. La droite Σ étant donnée, il est facile de retrouver le point M. En effet, la droite Σ rencontre les côtés du triangle en trois points 1, 2, 3, et les droites 1M, 2M, 3M sont les symétriques de Σ par rapport à ces côtés; on peut construire ces droites symétriques, et par suite obtenir le point M, en joignant les points 1, 2, 3 aux points H_1, H_2, H_3 qui sont les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle.

3. Théorème. — *Soit un triangle* ABC, *et soient* A′, B′, C′ *les milieux des côtés. On projette un point* S *en* a, b, c *sur les côtés du triangle; si l'on désigne par* α, β, γ *les points d'intersection des côtés correspondants des deux triangles* A′B′C′ *et* abc, *les trois droites* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ *concourent en un point* K (¹).

Appelons H′ *le centre du cercle* ABC, *qui est en même temps l'orthocentre du triangle* A′B′C′ : *si le point* S *se déplace sur une droite* σ *passant par le point* H′, *le point* K *reste fixe; les milieux des segments* HA, HB, HC *étant* A″, B″, C″, *les projections du point* K *sur les côtés du triangle* A″B″C″ *sont en ligne droite, ou encore les symétriques du point* K *par rapport aux côtés de ce triangle, soient* K''_1, K''_2, K''_3, *sont sur une droite* Σ *qui passe nécessairement en* H, *et cette droite* Σ *est perpendiculaire à la droite* H′S *ou* σ.

Il y a donc un lieu du point K, *et ce lieu est le cercle des neuf points du triangle* ABC.

Si l'on donne le point S, ou plutôt la droite H′S ou σ, pour avoir le point K, on mène par H la droite Σ perpendiculaire à σ : cette droite Σ rencontre les côtés du triangle A″B″C″ aux points 1″, 2″, 3″; si H''_1, H''_2, H''_3 désignent les symétriques du point H par rapport aux côtés du triangle A″B″C″, *c'est-à-dire les pieds des*

(¹) Ce fait rentre dans un théorème général indiqué par M. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1906, p. 96) :

Étant donnés deux triangles ABC, A′B′C′, *si les droites* AA′, BB′, CC′ *rencontrent respectivement les côtés* a, b, c *du premier triangle en trois points situés sur une même droite, les points* (a, a'), (b, b'), (c, c') *se joignent aux sommets* A′, B′, C′ *du second triangle par trois droites concourantes.*

Pour le théorème du texte, les deux triangles sont le triangle A′B′C′ et le triangle pédal.

hauteurs du triangle ABC, la droite qui joint le point H''_1 au point $1''$, et les deux droites analogues, concourent au point K.

4. Quand on projette un point K sur les côtés d'un angle A'', la droite déterminée par les projections de ce point est perpendiculaire à la droite inverse de la droite $A''K$ par rapport à l'angle; les droites inverses des droites $A''K$, $B''K$, $C''K$, par rapport aux angles A'', B'', C'' du triangle $A''B''C''$, sont donc perpendiculaires à la droite Σ ou parallèles à la droite σ. On en conclut aisément ceci : *Les coordonnées du point* K, *rapporté au triangle* $A''B''C''$, *sont inversement proportionnelles aux distances algébriques du point* S *aux axes menés par* H' *parallèlement aux côtés de ce triangle.*

II. — Géométrie dans l'espace.

5. Étant donné un tétraèdre ABCD, le lieu d'un point M dont les projections sur les plans des quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan est une surface $\mathfrak{M}$ dont l'équation, par rapport au tétraèdre de référence ABCD, est

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + \frac{D}{t} = 0,$$

A, B, C, D représentant les aires des faces du tétraèdre; c'est une surface du troisième ordre, corrélative d'une surface de Steiner, et ayant pour points doubles les points A, B, C, D (elle contient les arêtes du tétraèdre).

Ce théorème est bien connu, mais je ne crois pas que l'on ait remarqué ceci : lorsque le tétraèdre est orthocentrique, l'orthocentre étant H, le plan qui contient les projections d'un point M de la surface rencontre la droite HM en un point K pour lequel on a

$$\frac{HK}{HM} = \frac{2}{3}.$$

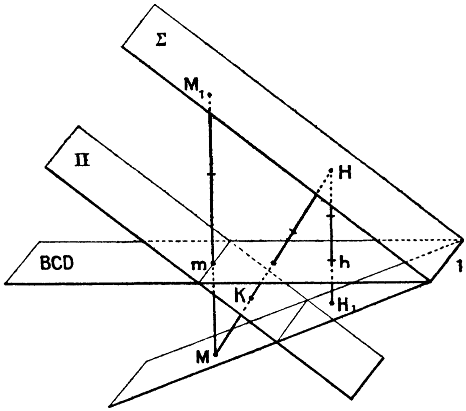
Lorsque M *décrit la surface* $\mathfrak{M}$, *le lieu du point* K *est une surface* $\mathfrak{K}$ *homothétique à la surface* $\mathfrak{M}$ *pour le centre d'homothétie* H *et le rapport* $\frac{2}{3}$; *la surface qui s'introduit ainsi joue pour le tétraèdre un rôle comparable à celui du cercle des neuf points pour le triangle. Si* A'', B'', C'', D'' *sont les points situés aux* $\frac{2}{3}$ *des segments* HA, HB, HC, HD, *cette surface* $\mathfrak{K}$ *est le lieu des points dont les projections sur les plans des faces du tétraèdre* $A''B''C''D''$ *sont coplanaires.* C'est une surface du troisième ordre ayant pour points doubles les points A'', B'', C'', D''.

6. J'indique pour le point M, relativement au tétraèdre ABCD, une construction que nous aurons l'occasion d'appliquer pour le point K, relativement au tétraèdre $A''B''C''D''$. La longueur KH étant double de MK, si l'on prolonge d'une longueur double de leur propre longueur les perpendiculaires abaissées de M sur les plans des faces du tétraèdre (*fig.* 2, pour le plan BCD), on obtient quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 situés dans un même plan Σ parallèle au plan Π des projections et passant par H.

Le plan Σ étant donné, on retrouve facilement le point M. Soient 1, 2, 3, 4 les droites suivant lesquelles le plan Σ coupe les plans des faces du tétraèdre; soient H_1, H_2, H_3, H_4 les points obtenus en abaissant de H des perpendiculaires sur les plans des faces et en les prolongeant de la moitié de leur longueur; le plan mené par la droite 1 et le point H_1, et les trois plans analogues, ont en commun le point M.

7. Théorème. — *Soit un tétraèdre orthocentrique* ABCD, *et soient* A′, B′, C′, D′ *les centres de gravité des faces. On projette un point* S *en* a, b, c, d

Fig. 2.



sur les plans des faces; si l'on désigne par α, β, γ, δ *les droites d'intersection des plans des faces correspondantes des deux tétraèdres* A′B′C′D′ *et* $abcd$, *les quatre plans* (a, α), (b, β), (c, γ) *et* (d, δ) *ont un point commun* K [1].

Appelons H′ *le point de rencontre des perpendicu-*

---

[1] Ce fait rentre dans un théorème général qui est l'extension à l'espace du théorème plan donné par M. Bricard (note précédente) :

Étant donnes deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′, *si les droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *rencontrent respectivement les plans* a, b, c, d *des faces du premier tétraèdre en quatre points situés dans un même plan, les droites* (a, a'), (b, b'), ... *déterminent avec les sommets* A′, B′, C′, D′ *du second tétraèdre quatre plans qui ont un point commun.*

Pour le théorème du texte, les deux tétraèdres sont le tétraèdre A′B′C′D′ et le tétraèdre pédal.

laires aux plans des faces menées par leurs centres de gravité, ou l'orthocentre du tétraèdre $A'B'C'D'$: *si le point* S *se déplace sur une droite* σ *passant par le point* H', *le point* K *reste fixe; les points* A'', B'', C'', D'' *étant les points des segments* HA, HB, HC, HD *qui vérifient les relations*

$$\frac{HA''}{HA} = \frac{HB''}{HB} = \frac{HC''}{HC} = \frac{HD''}{HD} = \frac{2}{3},$$

les projections du point K *sur les plans des faces du tétraèdre* $A''B''C''D''$ *sont dans un même plan, ou encore, si l'on abaisse du point* K *des perpendiculaires sur les plans des faces de ce tétraèdre, et si on les prolonge du double de leur longueur, les points obtenus,* K''_1, K''_2, K''_3, K''_4, *sont dans un plan* Σ *qui passe nécessairement en* H, *et ce plan* Σ *est perpendiculaire à la droite* $H'S$ *ou* σ.

Il y a donc un lieu du point K, *et ce lieu est la surface du troisième ordre* $\mathcal{K}$ *dont il a été parlé.*

Si l'on se donne le point S, ou plutôt la droite $H'S$ ou σ, pour avoir le point K, on mène par H le plan Σ perpendiculaire à σ : ce plan Σ coupe les plans des faces du tétraèdre $A''B''C''D''$ suivant des droites $1''$, $2''$, $3''$, $4''$; si H''_1, H''_2, H''_3, H''_4 désignent les points obtenus en abaissant du point H des perpendiculaires sur les plans des faces de ce tétraèdre et en les prolongeant de la moitié de leur longueur, *c'est-à-dire les pieds des hauteurs du tétraèdre* ABCD, le plan qui passe par le point H''_1 et la droite $1''$, et les trois plans analogues, passent par le point K.

8. Quand on projette un point K sur les plans des faces d'un trièdre A'', le plan déterminé par les projections de ce point est perpendiculaire à la droite inverse

de la droite $A''K$ par rapport au trièdre; les droites inverses des droites $A''K$, $B''K$, $C''K''$, par rapport aux trièdres A'', B'', C'', D'' du tétraèdre $A''B''C''D''$ sont donc perpendiculaires au plan Σ ou parallèles à la droite σ. On en conclut aisément ceci : *Les coordonnées du point* K, *rapporté au tétraèdre* $A''B''C''D''$, *sont inversement proportionnelles aux distances algébriques du point* S *aux plans orientés menés par* H′ *parallèlement aux plans des faces de ce tétraèdre.*

III. — Résumé des calculs.

9. Voici un résumé succinct des calculs qui m'ont donné les résultats précédents.

J'ai pris le tétraèdre ABCD, d'abord supposé quelconque, comme tétraèdre de référence; j'ai désigné par A, B, C les cosinus des dièdres *extérieurs* du trièdre D, par A′, B′, C′ les cosinus des dièdres extérieurs opposés; j'ai appelé $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ les sinus des trièdres supplémentaires de ceux du tétraèdre, c'est-à-dire les sinus des trièdres qui empruntent leurs arêtes aux axes X, Y, Z, T des faces du tétraèdre, ces axes étant supposés concourants. On a

$$
(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{array}{l}
A'\mathcal{A} + B'\mathcal{B} + C'\mathcal{C} + \mathcal{D} = 0,\\
A'\mathcal{D} + B\mathcal{C} + C\mathcal{B} + \mathcal{A} = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}\right.
$$

la seconde relation se déduisant de la première en mettant B et C au lieu de B′ et C′, et en échangeant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$; on a encore

$$
(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{l}
\mathcal{D}^2 = 1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC,\\
\mathcal{A}^2 = 1 - A^2 - B'^2 - C'^2 + 2AB'C',\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{array}\right.
$$

$$
(\mathrm{III})\quad\left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{D}\mathcal{A} = - A' + A^2 A' - ABB' - ACC' + BC' + CB', \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathcal{B}\mathcal{C} = - A + A'^2 A - A' BB' - A' CC' + BC + B'C', \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.
$$

10. Les coordonnées normales du point S étant p, q, r, s, celles des points a, b, c, d sont respectivement

$$
\begin{array}{lllll}
(a) & \mathrm{o}, & q - pC, & r - pB, & s - pA', \\
(b) & p - qC, & \mathrm{o}, & r - qA, & s - qB', \\
(c) & p - rB, & q - rA, & \mathrm{o}, & s - rC', \\
(d) & p - sA', & q - sB', & r - sC', & \mathrm{o},
\end{array}
$$

et le déterminant de ces quantités a pour valeur

$$
-(\mathcal{A}p + \mathcal{B}q + \ldots)(\mathcal{A}qrs + \mathcal{B}rsp + \ldots);
$$

l'équation du plan (a, α) est alors

$$
\begin{vmatrix}
x & y & z & t \\
p - qC & \mathrm{o} & r - qA & s - qB' \\
p - rB & q - rA & \mathrm{o} & s - zC' \\
p - sA' & q - sB' & r - sC' & \mathrm{o}
\end{vmatrix}
+ (\mathcal{A}qrs + \mathcal{B}rsp + \ldots)(\mathcal{B}y + \mathcal{C}z + \mathcal{D}t - 2\mathcal{A}x) = \mathrm{o}.
$$

Si l'on ajoute les équations des quatre plans (a, α), (b, β), ..., on a une identité.

11. Pour avoir les coordonnées du point K, j'ai considéré les équations des trois premiers plans, soit

$$
X_1 = \mathrm{o}, \qquad X_2 = \mathrm{o}, \qquad X_3 = \mathrm{o},
$$

et j'ai ordonné les coefficients par rapport à s en posant

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \mathcal{A}qrs + \mathcal{B}rsp + \ldots \\
&= s(\mathcal{A}qr + \mathcal{B}rp + \mathcal{C}pq) + \mathcal{D}pqr.
\end{aligned}
$$

Ces coefficients renferment au troisième degré les coordonnées p, q, r, s du point S. J'ai formé d'abord la combinaison

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0,$$

puis les combinaisons

$$\mathcal{D} p X_1 + \mathcal{A} s (X_1 + X_2 + X_3) = 0, \qquad \ldots, \qquad \ldots;$$

elles sont divisibles par Σ, et l'on obtient ainsi trois équations dont les coefficients renferment p, q, r, s au premier degré seulement.

12. Le tétraèdre étant maintenant supposé orthocentrique, on a

$$AA' = BB' = CC' = DD',$$

et l'on peut poser

$$\begin{array}{lll} A = \beta\gamma, & B = \gamma\alpha, & C = \alpha\beta, \\ A' = \delta\alpha, & B' = \delta\beta, & C' = \delta\gamma; \end{array}$$

les coordonnées de l'orthocentre sont proportionnelles à α, β, γ, δ, et celles du point H' vérifient les relations

$$\alpha x = \beta y = \gamma z = \delta t.$$

Les coefficients des équations, transformés par l'introduction des quantités α, β, γ, δ, s'expriment au moyen des binomes

$$\delta s - \alpha p, \qquad \ldots, \qquad \beta q - \gamma r, \qquad \ldots,$$

qui sont les coordonnées de la droite H'S ou σ.

Le point K dépend donc seulement de cette droite σ, et il y a un lieu du point K.

13. La relation entre les quantités A, B, C, ...

est ici

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}+\ldots+\ldots=-1,$$

ou encore

$$\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{1}{1-\beta^2}+\ldots+\ldots=3;$$

on a

$$\mathcal{D}\mathcal{A}=-\delta\alpha(1-\beta^2)(1-\gamma^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathcal{B}\mathcal{C}=-\beta\gamma(1-\alpha^2)(1-\delta^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\mathcal{A}(1-\alpha^2)}{\alpha}=\frac{\mathcal{B}(1-\beta^2)}{\beta}=\ldots=\frac{\mathcal{D}(1-\delta^2)}{\delta};$$

en appelant a, b, c, d les coordonnées normales de l'orthocentre, la relation entre les coordonnées normales d'un point est alors

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\frac{x}{a}+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\frac{y}{b}+\ldots+\ldots=-1.$$

Au moyen de cette relation, il arrive que l'on peut faire disparaître y et z de la première des équations qui déterminent le point K; en posant

$$x=x''+\frac{a}{3},\qquad y=y''+\frac{b}{3},\qquad \ldots,$$

on trouve

$$\frac{x''}{\alpha}\left(\frac{\alpha p}{1-\alpha^2}+\frac{\beta q}{1-\beta^2}+\frac{\gamma r}{1-\gamma^2}+\frac{\delta s}{1-\delta^2}-3\alpha p\right)=\ldots=\ldots=\ldots,$$

et l'on vérifie aisément que l'on a

$$\frac{\mathcal{A}}{x''}+\frac{\mathcal{B}}{y''}+\frac{\mathcal{C}}{z''}+\frac{\mathcal{D}}{t''}=0;$$

le lieu du point K est donc la surface $\mathcal{K}$.

14. Si l'on suppose que p, q, r, s représentent des coordonnées normales, on obtient

$$\frac{x''}{\alpha}\left(1+3\alpha^2\frac{p}{a}\right)=\frac{y''}{\beta}\left(1+3\beta^2\frac{q}{b}\right)=\ldots=\ldots;$$

en posant

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\ldots=\ldots=l,$$

on a donc

$$x''\left(p+\frac{l}{3\alpha}\right)=y''\left(q+\frac{l}{3\beta}\right)=\ldots=\ldots.$$

Or, si x_0, y_0, ... sont les coordonnées normales du point H′, on a

$$\alpha x_0=\beta y_0=\ldots=\ldots=\frac{-l}{3};$$

on a finalement

$$x''(p-x_0)=y''(q-y_0)=\ldots=\ldots.$$

C'est le résultat indiqué à la fin du n° 8, et duquel il résulte que le plan Σ est perpendiculaire à la droite σ.

(Si les dièdres du tétraèdre ABCD sont aigus, comme on a par exemple $\alpha^2=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A}}$, les quantités α, β, γ, δ sont des imaginaires pures; si l'on pose $\alpha=\alpha' i$, $\beta=\beta' i$, ..., on a

$$\frac{a}{\alpha' i}=\frac{b}{\beta' i}=\ldots=l=\frac{l'}{i},$$

et les égalités relatives à x_0, y_0, ... deviennent

$$\alpha' x_0=\beta' y_0=\ldots=\ldots=\frac{l'}{3}.\Big)$$

Note. — Revenons à la Géométrie plane.

a. Soit Ω le milieu commun des segments A′A″, B′B″, C′C″. La droite de Steiner du point K par rapport au triangle $A''B''C''$ étant la droite Σ, si K' est le symétrique de K par rapport à Ω, la droite de Steiner du point K' par rapport au triangle $A'B'C'$ est la parallèle à Σ menée par H'; comme K' et K sont diamétralement opposés sur le cercle $A'B'C'$, *la droite de Steiner du point* K *par rapport au triangle* $A'B'C'$ *est perpendiculaire à celle du point* K', *et se confond par suite avec la droite* σ. Donc, si l'on se donne la droite σ, en traçant les droites symétriques de celle-là par rapport aux côtés du triangle $A'B'C'$ (ce qui peut se faire en joignant les points $1'$, $2'$, $3'$ où la droite σ coupe les côtés de ce triangle aux points H'_1, H'_2, H'_3 qui sont les symétriques de H' par rapport aux côtés de ce même triangle), on aura trois droites qui iront concourir au point K. Cette propriété de la droite σ n'est d'ailleurs pas susceptible d'extension à l'espace : il y a entre les deux droites σ et Σ cette différence essentielle, au point de vue de l'extension à l'espace, que la droite Σ a pour analogue un plan Σ, tandis que la droite σ a pour analogue une droite σ.

La propriété de la droite σ qui vient d'être indiquée a été signalée par M. Bricard, dans une Note où il a établi géométriquement le théorème plan dont j'avais donné une démonstration analytique, et avant que j'eusse rencontré de mon côté la propriété du plan Σ.

b. Soit S_1 le point inverse du point S par rapport au triangle ABC. Les deux points S et S_1 ont même cercle pédal, et celui-ci rencontre le cercle des neuf points en deux points K et K_1, qui sont précisément le point K relatif à la droite $H'S$ et le point K_1 relatif à la droite $H'S_1$. Lorsque la droite SS_1 passe en H', les deux points K et K_1 se confondent, et le cercle pédal est tangent en K au cercle des neuf points. Plus particulièrement, si S et S_1 se confondent avec le centre I d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, le cercle pédal est précisément ce cercle, qui est ainsi tangent au cercle des neuf points.

Étant donné un triangle ABC *dont les hauteurs* AD, BE, CF *se coupent en* H, *soient* A'', B'', C'' *les milieux des segments* HA, HB, HC; *si* O *et* I *sont les centres du cercle circonscrit et du cercle inscrit, la perpendiculaire menée par* H *à la droite* OI *rencontre les côtés du triangle* A''B''C'' *en trois points* X, Y, Z, *et les droites* DX, EY, FZ *concourent en un point qui est le point de contact du cercle inscrit avec le cercle des neuf points.*

Ou encore (construction de M. Bricard, quest. 2036) :

Les milieux des côtés du triangle ABC *étant* A', B', C', *la droite* OI *rencontre les côtés du triangle* A'B'C' *en des points* U, V, W, *et si* O_1, O_2, O_3 *sont les symétriques de* O *par rapport aux côtés de ce triangle, les droites* O_1U, O_1V, O_1W *concourent en un point qui est le point de contact du cercle inscrit avec le cercle des neuf points.*

Si le cercle des neuf points est supposé tracé, comme D et O_1 sont sur ce cercle, on aura sans ambiguïté le point cherché en traçant seulement la droite DX, ou la droite O_1U.

(Le lieu des points inverses S et S_1 tels que la droite SS_1 passe au centre H' du cercle ABC est une cubique circonscrite au triangle ABC et passant en H' : toute droite passant par H' est encore rencontrée par la cubique en deux points inverses; le point inverse de A est sur BC, ...; le point inverse de H' est l'orthocentre H, de sorte que la tangente en H' passe en H; les quatre tangentes que l'on peut mener de H' à la cubique ont pour points de contact les centres I, I', I'', I''' des cercles tangents aux trois côtés du triangle. Aux points à l'infini sur la cubique, S, S', S'', et à leurs inverses, S_1, S'_1, S''_1, correspondent trois droites de Simson tangentes au cercle des neuf points : ce sont les tangentes aux points de contact de ce cercle avec l'hypocycloïde à trois rebroussements qui est l'enveloppe des droites de Simson relatives au triangle ABC.)