

CH. HALPHEN

Théorie et applications du coin

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__1_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

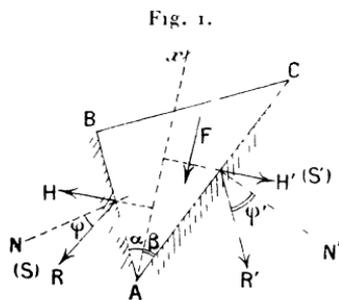
[R9a]

THEORIE ET APPLICATIONS DU COIN;

PAR M. CH. HALPHEN.

§ I. — FORMULES RELATIVES AU COIN.

Le coin est un prisme droit solide, à section triangulaire ABC (*fig. 1*), dont les faces AB et AC sont



engagées entre deux corps solides, et sur lequel agit une force F . Soit Ax la parallèle à F menée par A : α l'angle \widehat{BAx} et β l'angle \widehat{CAx} .

Supposons le coin en équilibre limite, c'est-à-dire en équilibre, mais sur le point de se mettre en mouve-

(2)

ment dans la direction de la force F . Les solides S et S' exercent sur les faces AB et AC des réactions, obliques a cause du frottement; ces reactions ont des résultantes, et les forces R, R' , égales et directement opposées à ces résultantes, sont les actions du coin sur S et S' ; donc, R et R' forment un système de forces équivalent à F , ce qu'on peut exprimer par deux equations, obtenues en projetant sur Ax et sur la direction perpendiculaire a Ax .

Soit φ l'angle de R avec la normale a AB , et φ' l'angle de R' avec la normale à AC ; comme il y a équilibre limite, φ et φ' sont les angles de frottement du coin sur S et S' ; nous aurons

$$F = R \sin(\varphi + \alpha) + R' \sin(\varphi' + \beta).$$

$$R \cos(\varphi + \alpha) = R' \cos(\varphi' + \beta).$$

Ce sont deux equations du premier degré en R et R' , dont on tire

$$R = \frac{F \cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi - \alpha) \cos(\varphi' + \beta) - \sin(\varphi' + \beta) \cos(\varphi - \alpha)}$$
$$= \frac{F \cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi - \varphi' + \alpha + \beta)}$$

et

$$R = \frac{F \cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi - \varphi' + \alpha + \beta)}.$$

En outre, les composantes H et H' des pressions suivant la direction perpendiculaire a Ax ont la même valeur, comme il résulte des équations

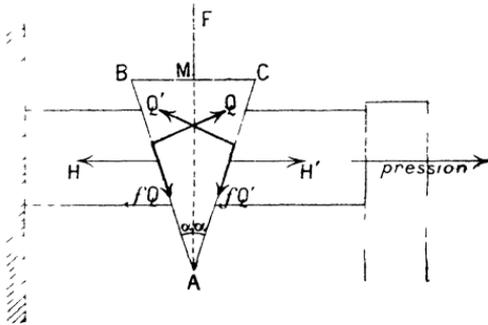
$$H = R \cos(\varphi - \alpha) = \frac{F \cos(\varphi - \alpha) \cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi - \varphi' + \alpha + \beta)},$$

$$H' = R' \cos(\varphi' + \beta) = \frac{F \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi - \varphi' + \alpha + \beta)}.$$

(3)

Cas particulier. — Si le coin a pour section un triangle isocèle (*fig. 2*), et si la force F est appliquée

Fig. 2.



suivant la hauteur, on a

$$\alpha = \beta.$$

Si en outre on suppose $\varphi = \varphi'$, on voit que

$$H = \frac{F \cos^2(\varphi + \alpha)}{\sin 2(\varphi + \alpha)} = \frac{F \cos^2(\varphi + \alpha)}{2 \sin(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)},$$
$$H = \frac{F}{2 \operatorname{tang}(\alpha + \varphi)};$$

si l'on supposait le frottement nul, on aurait

$$H_1 = \frac{F}{2 \operatorname{tang} \alpha},$$

valeur sensiblement inférieure à H .

Exemple. — Pour $F = 20^{\text{kg}}$, $\alpha = 5^\circ$, on a

$$H_1 = 115^{\text{kg}};$$

mais, si l'on prend $f = \operatorname{tang} \varphi = 0,30$, soit $\varphi = 17^\circ$ (frottement de bois dur sur bois), on n'a en réalité que

$$H = 24^{\text{kg}}, 7.$$

Dans ce cas particulier, supposons que le coin ait été enfoncé entre deux solides en les écartant; si F cesse d'agir, les solides vont, par suite de leur élasticité naturelle, chercher à se rapprocher, en exerçant sur le coin des efforts, tendant à le faire sauter. Les forces en jeu seront donc les efforts normaux Q , et les forces de frottement fQ , dont les composantes suivant la direction AM tendent respectivement à faire sauter le coin, et à le maintenir en place.

Le coin restera en équilibre, si

$$fQ \cos \alpha \geq Q \sin \alpha \quad \text{ou} \quad f \geq \tan \alpha \quad \text{ou} \quad \varphi \geq \alpha.$$

On dit alors qu'il y a *arc-boutement* ou *coincement* : le coin ne sautera que si l'on exerce sur lui une force de bas en haut.

Si, au contraire,

$$fQ \cos \alpha < Q \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \varphi < \alpha.$$

l'équilibre n'aura pas lieu, le coin sautera.

§ II. — APPLICATIONS PRATIQUES.

Le coin sert, en premier lieu, à exercer des pressions, comme l'indique la théorie, en prenant par exemple la disposition indiquée sur la figure 2, le solide de gauche étant buté sur un mur fixe. Bien souvent, après que l'on a obtenu la pression voulue, c'est-à-dire réalisé un serrage, l'ensemble reste en équilibre par coincement; il est calé.

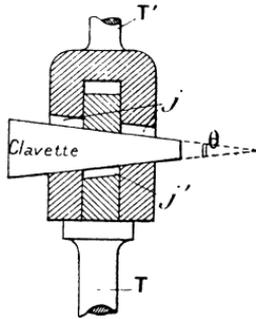
Les outils nommés *hache* et *tranche* agissent comme coins vis-à-vis des bois et métaux; par des pressions, ils separent la matière en deux après l'avoir fendue.

Les *clavettes* sont des coins que l'on emploie, dans les constructions mécaniques, pour assembler avec

(5)

serrage deux pièces. Supposons, par exemple, qu'on veuille relier deux tiges T et T' (fig. 3); on munira T

Fig. 3.



d'une portion plane, percée d'un trou rectangulaire, et T' d'une fourche percée également; dans ces ouvertures on enfoncera une clavette. Il faut avoir soin de ménager en j et j' des jeux, en taillant les ouvertures en conséquence, afin de pouvoir, en cas d'usure, enfoncer la clavette pour revenir au serrage primitif (*ratrapper le jeu*).

Dans les clavettes, on observe toujours la règle nécessaire pour qu'il y ait coïncement; c'est-à-dire $\alpha < \varphi$; ou, θ étant l'angle de la clavette, $\theta < 2\varphi$. La tangente de θ s'appelle *tirage* de la clavette; donc le tirage doit être inférieur au double du coefficient de frottement. Pour des clavettes souvent démontées, le tirage est de 0,10 à 0,05; pour des clavettes fixes, il est de 0,02 en moyenne.

Parmi les nombreuses applications de serrage par clavette, on peut citer le calage d'une poulie sur un arbre: la clavette étant enfoncée entre le moyeu de la poulie et l'arbre qui porte à cet effet une rainure. Mais, lorsque le clavetage est appliqué à un organe de ma-

chine à mouvements non réguliers, ou soumis à de fortes trépidations, sous l'influence des diverses forces qui en résultent, le coïncement peut cesser; pour empêcher les disjonctions d'organes qui se produiraient alors, on a imaginé des dispositifs de sûreté maintenant les clavettes en place. On peut voir différents types de ces dispositifs dans les clavettes des têtes de bielle des machines à vapeur, locomotives, etc., ils sont mentionnés dans les ouvrages spéciaux.

§ III. — APPLICATION DE LA THÉORIE DU COIN AUX MURS DE SOUTÈNEMENT.

Soit un *mur de soutènement* dont AB est le parement intérieur. La terre exerce sur ce mur une poussée, et, si l'on suppose qu'il vienne à se rompre, on constate que la masse de terre qu'il devait retenir s'est fendue suivant une surface AC, sensiblement plane, dite *plan de rupture*. Dès lors, on peut envisager la poussée de la terre sur le mur, comme celle d'un coin ABC, auquel est appliqué son poids F (*fig. 4*). En supposant que le parement AB soit vertical, c'est-à-dire $\alpha = 0$. φ étant l'angle de frottement de la terre sur la maçonnerie, et φ' l'angle de frottement de la terre sur la terre, on aura

$$R = \frac{F \cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi + \varphi' + \beta)}.$$

C'est la poussée totale sur le mur.

Évaluons F en supposant que 1^m soit la longueur du mur, δ la densité de la terre, et i l'inclinaison sur l'horizontale du talus BC. Comme $\widehat{BCA} = 90^\circ - (i + \beta)$, on a

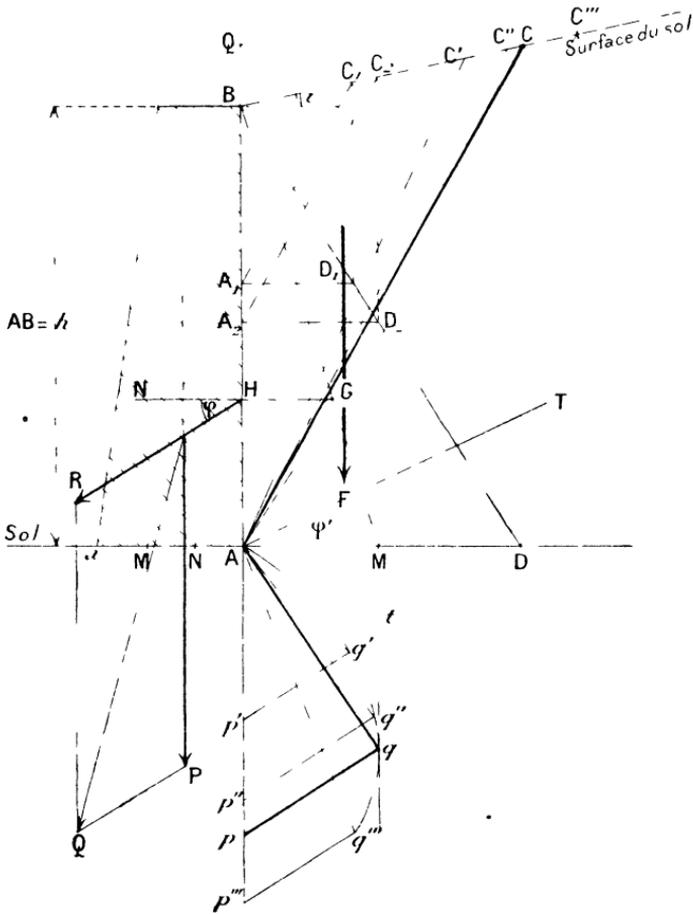
$$\frac{AB}{\cos(i - \beta)} = \frac{BC}{\sin \beta}.$$

(7)

La hauteur CQ du triangle ABC est donc

$$CQ = BC \cos i = \frac{h \sin \beta \cos i}{\cos(i + \beta)},$$

Fig. 4.



et par suite

$$F = \text{surf. } ABC \times \gamma^m \times \partial = \frac{\partial h^2 \sin \beta \cos \alpha}{2 \cos(\alpha - \beta)}$$

Donc

$$R = \frac{\gamma h^2 \sin \beta \cos i \cos(\varphi' - \beta)}{\gamma \cos(i + \beta) \sin(\varphi - \varphi' + \beta)}.$$

Mais β est inconnu. Afin d'avoir un mur suffisamment solide, on suppose que le plan de rupture AC est celui qui donne la poussée R maximum. R étant fonction de β , il suffit d'égaliser à zéro la dérivée $\frac{dR}{d\beta}$; on a ainsi une équation en β donnant la valeur de cet angle pour le cas le plus défavorable.

On a remarqué que la valeur de β ainsi obtenue est généralement voisine de $(45^\circ - \frac{\varphi'}{2})$, d'où le tracé pratique suivant : on mène l'horizontale de A, à partir de laquelle on prend l'angle φ' , en \widehat{DAT} , la bissectrice AC de l'angle \widehat{BAT} est la trace du plan de rupture cherché. Poncelet a donné un procédé graphique pour chercher le prisme de poussée maximum, en s'appuyant sur ce principe bien connu : trois forces en équilibre (ici, ces forces sont F, — R et — R') peuvent être représentées par les trois côtés d'un triangle forme de vecteurs équipollents à ces forces.

Menons des droites AC', AC'', AC''', ...; et prenons sur la verticale du point A une longueur Ap', proportionnelle au poids du prisme ABC'; puis menons la droite Aq', faisant avec AC' un angle $\widehat{CAq'} = 90^\circ + \varphi'$, et enfin p'q' parallèle à la direction connue de R. Ces deux dernières droites se coupent en q', et l'on voit que le triangle Ap'q' a bien des côtés équipollents à F, — R et — R'. Traçons de même Ap''q'', Ap'''q''', ..., correspondant à AC'', AC''', ...; et joignons les points q', q'', q''', ... par une courbe continue. Si l'on mène une tangente qt à cette courbe, parallèlement à AB, la poussée \overline{qp} correspon-

dant au point q de contact est la poussée maximum; et la longueur du vecteur \overline{qp} représente cette poussée à l'échelle de la figure; le plan cherché AC est donc celui qui fait avec la droite Aq un angle $\widehat{qAC} = 90^\circ + \varphi'$. Ce procédé est, lui aussi, approximatif, car le point q n'est pas déterminé d'une façon précise; mais il suffit pour la pratique.

Cherchons le point d'application de la poussée R sur le parement AB du mur; c'est le *centre de poussée*. Pour cela, considérons un point A_1 entre A et B; sur la fraction de mur BA_1 , la poussée est, par similitude, celle qu'exerce le coin BA_1C_1 , A_1C_1 étant parallèle à AC; et cette poussée maximum est proportionnelle à la surface A_1BC_1 . De même, sur A_2B , la poussée est proportionnelle à A_2BC_2 ; donc, sur l'élément A_1A_2 que nous supposons très petit, la poussée est proportionnelle à $A_1A_2C_1C_2$, ou bien à $A_1A_2D_1D_2$, les points D_1 et D_2 étant, sur les perpendiculaires en A_1 et A_2 à AB, à des distances de cette droite égales à celles de C_1 et C_2 . On voit que les points D_1, D_2, \dots sont sur une droite, passant par B; et, par suite, la poussée totale sur AB, résultante de toutes les poussées élémentaires sur les éléments A_1A_2 , est appliquée au point H, projection sur AB du centre de gravité du triangle ABD, d'après un théorème bien connu; c'est-à-dire que la poussée R est appliquée au tiers de AB à partir de A.

Après avoir calculé, ou construit graphiquement la poussée R, et l'avoir appliquée au centre de poussée, on compose cette force avec le poids P du mur. Pour que ce mur soit en équilibre, en supposant qu'il soit un solide rigide et homogène, on sait que cette résultante ρ doit passer dans le polygone d'appui, c'est-à-dire

dans la base xA ; mais, pour que la stabilité du mur soit parfaite, il est préférable, d'après la *résistance des matériaux*, que φ passe dans le tiers moyen MN de la base. En outre, l'angle de φ avec P doit évidemment être inférieur à l'angle de frottement φ de la maçonnerie sur le sol. En divisant la pression sur la base, φ , par la surface de la base, on obtient approximativement la pression sur le sol par unité de surface (centimètre carré par exemple); cette pression ne doit pas dépasser une certaine limite pour que le sol résiste sans s'écraser; et la condition de cette limite fixe donc la largeur de la base à adopter pour le mur. Quant à la composante H horizontale de la poussée, elle tend à trancher le mur, et fixe l'épaisseur à adopter pour le mur, pour qu'il n'y ait pas rupture par *cisaillement*.
