

A. MANNHEIM

**Démonstration de la construction trouvée  
par Hamilton pour déterminer le point  
où le cercle des neuf points d'un triangle  
touche le cercle inscrit**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 6  
(1906), p. 226-228

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1906\\_4\\_6\\_226\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6_226_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[K2c]

**DÉMONSTRATION DE LA CONSTRUCTION TROUVÉE PAR  
HAMILTON POUR DÉTERMINER LE POINT OÙ LE  
CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE TOUCHE  
LE CERCLE INSCRIT <sup>(1)</sup>;**

PAR M. A. MANNHEIM.

---

En 1899, la question 1544 posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* appela l'attention sur la détermination du point de contact du cercle des neuf points d'un triangle et du cercle inscrit à ce triangle. J'envoyai une première réponse, parue la même année

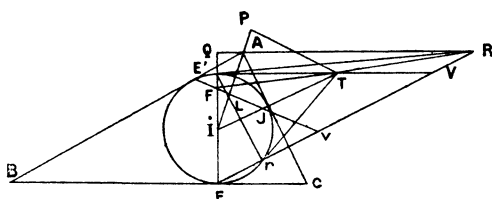
---

(1) Pour la bibliographie des questions mentionnées, voir aussi : *Nouvelle correspondance mathématique* : F. PROTH, quest. 301, 1877, p. 399; E. LUCAS, 1878, p. 123 (généralisation).

*Intermédiaire des Mathématiciens* : A. THORIN, quest. 334, 1894, p. 186; E. FAUQUEMBERGUE, 1895, p. 123; H. TARRY, 1895, p. 363; 1896, p. 276. — E.-B. ESCOTT, quest. 1264, 1898, p. 78; quest. 2546, 1903, p. 69; P.-F. TEILHET, 1904, p. 51. — G. DE ROCQUIGNY, quest. 2746, 1904, p. 68; quest. 2813, 1904, p. 190; quest. 2822, 1904, p. 214.

(2) Voir : GERONO, *Nouvelles Annales*, 1865; et CANON, *Nouvelles Annales*, 1903.

à la page 264, puis une autre qui, publiée en 1904, page 18 (1), renferme la construction suivante, la plus simple, je crois, des constructions connues :



Sur le cercle de centre I, inscrit au triangle ABC, on prend le point E' diamétralement opposé au point E, où ce cercle touche BC; la droite qui passe par E' et par le milieu L de AI coupe le cercle inscrit au point où celui-ci est touché par le cercle des neuf points du triangle ABC.

C'est en me servant de cette construction que je vais retrouver la suivante, due à W.-R. Hamilton :

Pour un triangle ABC, par le point de contact E du côté BC et du cercle inscrit, on mène la droite qui passe par le point où la polaire de A, par rapport au cercle inscrit, coupe la droite B'C' qui joint les milieux de AB et AC; cette droite rencontre le cercle inscrit au point  $\Gamma$  où il est touché par le cercle des neuf points.

Appelons T le point de rencontre des tangentes en E' et  $\Gamma$  au cercle inscrit. La polaire de T est E' $\Gamma$ , par suite la polaire de L est la perpendiculaire TP à AI. On a alors

$$IL \times IP = \overline{IE}^2 \quad \text{ou} \quad 2. IL \times \frac{IP}{2} = \overline{IE}^2.$$

(1) Je l'avais déjà proposée, sous forme de question à résoudre, en 1902, page 95, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*.

c'est-à-dire

$$AI \times \frac{IP}{2} = \overline{IE}^2.$$

Ainsi, la polaire de A est la perpendiculaire à AI, élevée du milieu de IP, c'est donc la perpendiculaire abaissée du milieu J de IT sur AI. Cette droite rencontre EE' au point F, dont la polaire AQ est alors la perpendiculaire abaissée de A sur EE'.

Menons la droite EΓ, elle est parallèle à IT, elle coupe alors E'T au point V tel que

$$TV = TE'.$$

Il résulte de là que, si l'on appelle R le point où EV coupe AQ, les droites RQ, RE', RT, RE forment un faisceau harmonique.

Les rayons de ce faisceau déterminent sur QE une division harmonique, donc RT passe par F, qui est le pôle de RQ.

La podaire FJ de A, passant par le milieu J de IT, coupe ER en son milieu U. On voit donc que *la droite EF passe par le point U, qui, sur la polaire de A, est à égales distances de A et de BC.*

C'est ce qu'il fallait démontrer.