

H. LAURENT

**Sur les substitutions linéaires qui laissent
une forme quadratique invariante**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 234-237

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6_234_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[B10a]

**SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES QUI LAISSENT
UNE FORME QUADRATIQUE INVARIANTE ;**

PAR M. H. LAURENT.

On a donné bien des moyens pour trouver les substitutions qui transforment une forme quadratique en elle-même ou qui laissent cette forme invariante. Je crois que la solution que je vais indiquer aura le mérite de la simplicité lorsqu'il s'agira d'applications. Soient a_{ij} des constantes et x_1, x_2, \dots, x_n les variables,

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j$$

une forme à n variables. On peut exprimer la condition d'invariance au moyen de la formule

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ij} y_i y_j$$

ou

$$\sum a_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) = 0,$$

y_1, \dots, y_n désignant de nouvelles variables ; ou, en mettant les carrés en évidence,

$$\sum a_{ii} (y_i^2 - x_i^2) + \sum a_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) = 0.$$

Sous le second signe \sum , i et j seront alors différents et l'on aura

$$\begin{aligned} & \sum a_{ii} (y_i - x_i)(y_i + x_i) \\ + & \sum a_{ij} \frac{1}{2} [(y_i - x_i)(y_j + x_j) + (y_i + x_i)(y_j - x_j)] = 0; \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\sum a_{ij} (y_i - x_i)(y_j + x_j) = 0,$$

ou, si l'on désigne par f_i la demi-dérivée de f relative à x_i :

$$(1) \quad \sum (y_i - x_i) f_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = 0.$$

Adjoignons à cette équation les suivantes, où les c_{ij} sont indépendants des x et des y :

$$(2) \quad \begin{cases} c_{11}(x_1 - y_1) + \dots + c_{1n}(x_n - y_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}(x_1 - y_1) + \dots + c_{nn}(x_n - y_n) = 0; \end{cases}$$

nous supposons que les n équations (2) se réduisent à $n - 2$ distinctes, le système (1), (2) déterminera alors les $y_i - x_i$ en fonction des $y_i + x_i$ au moyen d'équations de la forme

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 - x_1 = k_{11} f_1 + k_{12} f_2 + \dots + k_{1n} f_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n - x_n = k_{n1} f_1 + k_{n2} f_2 + \dots + k_{nn} f_n, \end{cases}$$

les k_{ij} désignant des quantités indépendantes des x et des y ; quant à f_i il est mis pour abréger à la place de $f_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$, d'ailleurs il faudra supposer

$$k_{ii} = 0, \quad k_{ij} + k_{ji} = 0.$$

Vérifions que les équations (3) représentent bien les substitutions laissant f invariante. A cet effet multiplions la première formule (3) par f_1 , la seconde par f_2, \dots , la dernière par f_n et ajoutons; nous aurons

$$\sum (y_i - x_i) f_i = 0,$$

équation qui en vertu de (1) est équivalente à

$$\sum a_{ij}x_i x_j = \sum a_{ij}y_i y_j.$$

En particulier, si $f = \sum x_i^2$, les formules (3) deviennent

$$y_1 - x_1 = k_{11}(y_1 + x_1) + \dots + k_{1n}(y_n + x_n),$$

.....

et définissent une substitution orthogonale de déterminant + 1.

Les formules (3) qui renferment $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres k_{ij} ont cela de remarquable que les y s'expriment en fonction des x sous forme rationnelle, en sorte que, si les nombres k_{ij} sont rationnels, les coefficients de la substitution seront des fonctions rationnelles des a_{ij} à coefficients rationnels.

Interprétons géométriquement les résultats qui précèdent : $f = 0$ représente une surface dans l'espace à n dimensions, cette surface est un cône. La substitution (3) laisse ce cône invariant, mais elle laisse encore invariantes n droites.

Posons, en effet,

$$y_i = s x_i;$$

les équations (3) deviennent

$$(s - 1)x_1 = (s + 1)[k_{11}f_1(x_1, x_2, \dots) + \dots + k_{1n}f_n(x_1, x_2, \dots)]$$

.....

ou

$$\frac{s - 1}{s + 1} x_1 = x_1 f_1(k_{11}, \dots, k_{1n}) + x_2 f_2(k_{11}, \dots, k_{1n}) + \dots,$$

$$\frac{s - 1}{s + 1} x_2 = x_1 f_1(k_{21}, \dots, k_{2n}) + x_2 f_2(k_{21}, \dots, k_{2n}) + \dots,$$

L'élimination des x fournit une équation du degré n en s , à chaque racine de cette équation correspondent des valeurs des x , que la substitution (3) multiplie simplement par s , et les valeurs des n définissent une droite passant par l'origine, droite qui reste invariante, quoique ses points ne soient pas invariants.

Il ne sera peut-être pas inutile de faire observer que les substitutions (3) que nous avons trouvées ont pour déterminant $+ 1$, car, pour

$$k_{11} = k_{12} = \dots = 0,$$

on a

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \dots, \quad x_n = y_n.$$

Il ne serait pas difficile de se procurer des substitutions du déterminant $- 1$ en changeant quelques signes dans les formules (3).