NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GUITTON

Démonstration de la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 237-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__237_1>

[E5]

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,;$$

Par M. É. GUITTON.

Je vais montrer que cette intégrale définie est la limite vers laquelle tend

$$J_m = \int_{-m}^{+m} \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} dx$$

quand m augmente indéfiniment par valeurs entières.

Prouvons d'abord que J_m a pour limite $\sqrt{\pi}$.

Le changement de variable $x = m \sin\varphi$ donne

$$J_m = m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2m^2+1} \varphi \, d\varphi;$$

on est ainsi conduit à considérer

$$I_p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^p \varphi \, d\varphi$$

(c'est ce qu'on fait quand on démontre la formule de Wallis).

On voit facilement que :

1° I_p diminue quand p augmente;

2° $I_p = \frac{p-1}{p} I_{p-2}$.

Ceci permet de calculer I_p en remarquant que $I_1 = 2$, $I_0 = \pi$; ensuite de conclure que

$$I_p I_{p-1} = \frac{2\pi}{p},$$

$$\lim \frac{I_p}{I_{p-1}} = 1,$$

et finalement

$$\lim p I_p^2 = 2\pi.$$

Il reste pour achever à remplacer p par $2m^2 + 1$.

J'appelle A l'intégrale proposée. ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, il faut montrer que, à partir d'une certaine valeur de m, la différence entre A et J_m est inférieure à ε.

Il existe un nombre positif a tel que

$$A = \int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx + \frac{\varepsilon}{2};$$

je vais faire grandir m en le prenant plus grand que a.

$\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}$, quand $m(\geqq x)$ grandit, va évidemment en croissant, et l'on sait qu'il tend vers e^{-x^2}, donc,

$$\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} < e^{-x^2} \qquad (m \geqq x).$$

Par suite,

$$\int_{-a}^{+a} \left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} dx < J_m < \int_{-m}^{+m} e^{-x^2}\, dx < A;$$

et

$$\int_{-a}^{+a} \left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} dx < J_m < \int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\, dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de montrer que l'on a, à partir de m suffisamment grand,

$$\int_{-a}^{+a} \left[e^{-x^2} - \left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}\right] dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En développant la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances ascendantes de x, on trouve une série alternée; on augmente sa valeur d'abord en prenant la série des valeurs absolues, ensuite en remplaçant x par a : elle devient alors

$$e^{a^2} - \left(1+\frac{a^2}{m^2}\right)^{m^2}.$$

Il suffit de prendre m assez grand pour que

$$e^{a^2} - \left(1+\frac{a^2}{m^2}\right)^{m^2} < \frac{\varepsilon}{a},$$

ce qui est possible, puisque le premier membre a pour limite zéro.