PERNOT
MOISSON

# Étude des points à l'infini d'une courbe algébrique

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 6 (1906), p. 241-266
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__241_0>

[M¹1b]

# ÉTUDE DES POINTS A L'INFINI D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE (¹);

PAR MM. PERNOT ET MOISSON,
Anciens élèves de l'École Polytechnique.

On sait que les points communs à la courbe et à la droite de l'infini sont dans les directions obtenues en égalant à zéro les termes du plus haut degré :

$$x^p y^q (y - ax)^\alpha (y - bx)^\beta \ldots (y - lx)^\lambda = 0.$$

La multiplicité du point à l'infini dans la direction $y = ax$ est obtenue en coupant par $y - ax = \delta$, et constatant l'abaissement du degré de l'équation aux $x$ de rencontre.

Pratiquement, on cherche le groupe homogène de degré le plus élevé qui ne soit pas divisible par $y - ax$ : la différence entre le degré de l'équation et celui de ce groupe homogène est l'ordre de multiplicité du point à l'infini.

Si cet ordre est $\alpha$, la droite à l'infini, rencontrant en $\alpha$ points seulement, n'est pas tangente; on trouvera $\alpha$ asymptotes, réelles ou imaginaires à distance finie.

Si l'ordre est inférieur à $\alpha$, la droite à l'infini est nécessairement tangente, il y a branche parabolique simple ou multiple; il peut y avoir certaines branches de courbe à l'infini ayant une tangente ordinaire, c'est-à-dire que la courbe peut avoir simultanément des

(¹) Cet article fait suite à celui qui a pour titre : *Sur la construction des courbes algébriques* (p. 106 du présent Tome).

branches paraboliques et des branches hyperboliques dans une même direction.

Nous étudierons d'abord les branches hyperboliques dans les directions où l'ordre de multiplicité du point est le même que celui de la direction asymptotique; en second lieu, les branches paraboliques existant seules; enfin les branches hyperboliques et paraboliques simultanées.

Les procédés employés sont analogues à ceux employés pour l'étude de la courbe aux environs d'un point à distance finie; ces procédés permettent d'obtenir un tracé correct de la courbe et de fixer la position ainsi que le genre des branches paraboliques.

## I. — Direction asymptotique simple.

Soit $y - cx = 0$, cette direction. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - cx)\psi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-r}(x, y) + \ldots = 0.$$

Si $\varphi_{n-1}(x, y)$ est identiquement nul, la droite $y - cx = 0$ est l'asymptote elle-même, car elle rencontre la courbe en deux points au moins, confondus en un point simple à l'infini, elle est donc tangente à l'infini.

Supposons $\varphi_{n-1}(x, y)$ non identiquement nul et soit $\varphi_{n-r}(x, y)$ de degré $n - r$ le groupe homogène suivant par ordre de degrés décroissants.

Posons $y = tx$, $t$ a pour limite $c$ quand, $x$ et $y$ croissant sans limite, le point qui décrit la courbe s'éloigne à l'infini dans la direction considérée. Il vient

$$(y - cx)\psi_{n-1}(1, t)x^{n-1} + \varphi_{n-1}(1, t)x^{n-1} + \varphi_{n-r}(1, t)x^{n-r} + \ldots = 0$$

ou

$$y - cx = -\frac{\varphi_{n-2}(1, t) + \frac{1}{x^{r+1}}\varphi_{n-r}(1, t) + \ldots}{\psi_{n-1}(1, t)}.$$

Quand $x$ croît sans limite, la limite de $y - cx$ est l'ordonnée à l'origine $d$ de l'asymptote. On a donc

$$d = -\lim \frac{\varphi_{n-2}(1, t) + \frac{1}{x^{r+1}} \varphi_{n-r}(1, t) + \dots}{\psi_{n-1}(1, t)} = -\frac{\varphi_{n-2}(1, c)}{\psi_{n-1}(1, c)};$$

on retrouve la règle connue. L'asymptote est alors la droite

$$y - cx - d = 0.$$

Pratiquement, on résout l'équation de la courbe par rapport au facteur $y - cx$ pris dans les termes du plus haut degré

$$y - cx = -\frac{\varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-r}(x, y) + \dots}{\varphi_{n-1}(x, y)}.$$

On remplace dans le second membre $y$ par $cx$, il reste une fraction rationnelle, quotient de deux polynomes entiers en $x$, dont on cherche la limite pour $x$ infini.

*Exemple :*

$$x^2(2x - 3y) - (y - x)(3y + x) + y - 2x = 0.$$

Cherchons l'asymptote parallèle à $2x - 3y = 0$. On a

$$2x - 3y = \frac{(y - x)(3y + x) - y + 2x}{x^2}.$$

Remplaçons dans le second membre $y$ par $\frac{2}{3}x$ en remarquant qu'il suffit de faire la substitution dans les termes du second degré. On a

$$\frac{-\frac{1}{3}x \times 3x + \dots}{x^2}$$

dont la limite est $-1$. L'asymptote cherchée est

$$2x - 3y = -1.$$

*Position de la courbe par rapport à l'asymptote.* — Elle est donnée par le signe de $y - cx - d$ ou, plus généralement, si l'asymptote est

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

la position est donnée par le signe de $\alpha x + \beta y + \gamma$ pour les coordonnées du point de la courbe quand il s'éloigne à l'infini, l'asymptote partageant le plan en deux régions pour les points desquelles la fonction $\alpha x + \beta y + \gamma$ est d'un signe ou de l'autre.

L'asymptote rencontre la courbe en deux points à l'infini au moins. L'équation de la courbe peut donc se mettre sous la forme

$$(y - cx - d)[\psi_{n-1}(x, y) + \psi_{n-2}(x, y)] + \chi(x, y) = 0,$$

$\chi(x, y)$ étant un polynome de degré au plus égal à $n-2$. Effectuons la division de $\chi(x, y)$ par

$$y - cx - d;$$

on aura

$$\chi(x, y) = (y - cx - d)\,Q(x, y) + R(x),$$

$R(x)$ étant un polynome de degré $n - p$, avec $p \geqq 2$.

On a donc

$$\begin{aligned} y - cx - d &= \frac{-R(x)}{\psi_{n-1}(x, y) + \psi_{n-2}(x, y) + Q(x, y)} \\ &= \frac{-(a_0 x^{n-p} + \ldots}{x^{n-1}\psi_{n-1}(1, t) + x^{n-2}\psi_{n-2}(1, t) + \ldots} \\ &= \frac{1}{x^{p-1}} \frac{-\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots\right)}{\psi_{n-1}(1, t) + \dfrac{1}{x}\psi_{n-2}(1, t) + \ldots}. \end{aligned}$$

Quand $x$ croît sans limite, le second facteur du second membre a pour limite $-\frac{a_0}{\psi_{n-1}(1, c)}$. Le signe $y - cx - d$ pour $x$ infini est donc celui de

$$-\frac{a_0}{x^{p-1}\psi_{n-1}(1, c)}.$$

Le calcul se fait pratiquement de la manière suivante : on écrit

$$y - cx - d = -\frac{\varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \ldots}{\psi_{n-1}(x, y)} - d.$$

On réduit le second membre au même dénominateur; dans le numérateur de la fraction obtenue, on remplace $y$ par $cx + d$, ce numérateur se réduit alors à $-R(x)$; dans le dénominateur, on remplace $y$ par $cx$ et l'on prend les termes de plus haut degré en $x$ au numérateur et au dénominateur; le signe de leur rapport est celui de $y - cx - d$.

Si $p$ est pair, la courbe est de part et d'autre de son asymptote. Il y a contact simple à l'infini si $p = 2$, point méplat à l'infini si $p = 2K$ avec $K > 1$.

Si $p$ est impair, il y a inflexion à l'infini et les deux branches de courbe sont asymptotes du même côté de la droite.

Dans les deux cas, la courbe est asymptote aux deux extrémités de la droite.

Remarquons enfin que, si $R(x) = 0$, on a

$$y - cx - d = 0.$$

Les racines de $R(x)$ sont donc les abscisses des points de rencontre à distance finie de la courbe et de son asymptote. Pour la position de la courbe, il suffit de calculer le terme de plus haut degré de $R(x)$, qui permet de conclure.

*Exemple.* — Reprenons la courbe donnée en exemple précédemment

$$x^2(2x-3y)-(y-x)(3y+x)+y-2x=0.$$

L'asymptote est

$$2x-3y+1=0.$$

L'équation de la courbe donne

$$\begin{aligned} 2x-3y+1 &= \frac{(y-x)(3y+x)-y+2x}{x^2}+1 \\ &= \frac{3y^2-2xy-y+2x}{x^2}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans le second membre $y$ par $\frac{2x+1}{3}$. Il vient, réductions faites,

$$\frac{6x+2}{3x^2}.$$

Le signe de cette expression est celui de $\frac{2}{x}$ pour $x$ croissant sans limite. La courbe est donc dans la région positive (celle de l'origine) par rapport à l'asymptote pour $x$ infiniment grand positif, et de l'autre côté pour $x$ négatif. Il y a contact simple à l'infini. L'asymptote rencontre la courbe à distance finie en un troisième point dont l'abscisse est $-\frac{1}{3}$ et, par suite, l'ordonnée $\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}+1\right)$ ou $+\frac{1}{9}$.

*Remarque.* — Pour la détermination de l'asymptote, tout se passe comme si la courbe proposée était remplacée par la courbe

$$(y-cx)\psi_{n-1}(x,y)+\varphi_{n-1}(x,y)=0,$$

courbe unicursale de degré $n$, puisqu'elle a un point multiple d'ordre $n-1$ à l'origine.

Pour l'étude de la position de la courbe par rapport à son asymptote, il faut prendre un terme de plus (généralement suffisant) et considérer la courbe

$$(y - cx)\psi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-r}(x, y) = 0$$

ou

$$\begin{aligned}(y - cx - d)\,&\psi_{n-1}(x, y)\\ &= -\varphi_{n-1}(x, y) - d\psi_{n-1}(x, y) - \varphi_{n-r}(x, y),\end{aligned}$$

qu'on transforme immédiatement en la suivante, qui est unicursale :

$$\begin{aligned}x^{n-1}(y - cx - d)\,&\psi_{n-1}(1, c)\\ &= -\varphi_{n-1}(x, cx + d)\\ &\quad - d\psi_{n-1}(x, cx + d) - \varphi_{n-r}(x, cx + d).\end{aligned}$$

Si le degré du second membre s'abaisse au-dessous de $n - r$, il faut alors prendre un terme de plus dans l'équation de la courbe proposée et l'on ramène de la même façon à une courbe unicursale.

## II. — Point double a l'infini.

L'équation de la courbe peut s'écrire, en supposant les asymptotes à distance finie,

$$\begin{aligned}(y - cx)^2\psi_{n-2}(x, y) &+ (y - cx)\chi_{n-2}(x, y)\\ &+ \varphi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-3}(x, y) + \ldots = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(y - cx)^2\psi_{n-2}(1, t) &+ (y - cx)\chi_{n-2}(1, t)\\ &+ \varphi_{n-2}(1, t) + \frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t) + \ldots = 0;\end{aligned}$$

en posant $y = tx$, ou encore

$$(y - cx - \alpha')(y - cx - \alpha'') + \frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t) + \ldots = 0,$$

$\alpha'$ et $\alpha''$ étant les racines de l'équation en $\lambda$,

$$\lambda^2\psi_{n-2}(1, t) + \lambda\,\chi_{n-2}(1, t) + \varphi_{n-2}(1, t) = 0.$$

Quand $x$ et $y$ croissent sans limite de telle sorte que $t$ tende vers $c$, c'est-à-dire quand le point s'éloigne à l'infini sur la courbe dans la direction donnée, $\alpha'$ et $\alpha''$ ont pour limites les racines $d'$ et $d''$ de l'équation en $d$ :

$$d^2\psi_{n-2}(1, c) - d\chi_{n-2}(1, c) + \varphi_{n-2}(1, c) = 0,$$

$\chi_{n-2}(1, c)$ et $\varphi_{n-2}(1, c)$ pouvant être différents de zéro ou nuls, sans que les résultats suivants en soient changés, contrairement à la discussion analogue des tangentes en un point double à distance finie.

On a

$$(y - cx - \alpha')(y - cx - \alpha'') = -\frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t)\ldots.$$

Par suite, quand $x$ et $y$ croissent sans limite :

$$\lim(y - cx - d')(y - cx - d'') = 0.$$

L'un des facteurs au moins a donc une limite nulle. On vérifie facilement que l'une quelconque des deux droites

$$y - cx - d' = 0, \qquad y - cx - d'' = 0$$

est asymptote, c'est-à-dire qu'elle rencontre la courbe en trois points au moins à l'infini. En effet, si l'on coupe la courbe par une quelconque de ces droites, la première par exemple, on est ramené au système des deux équations

$$\begin{gathered} d'^2\,\psi_{m-2}(x, cx + d') + d\,\chi_{m-2}(x, cx + d') \\ + \varphi_{n-2}(x, cx + d') + \varphi_{n-3}(x, cx + d') + \ldots = 0, \\ y = cx + d'; \end{gathered}$$

les termes de degré $n - 2$ de la première sont

$$d'^2 \psi_{n-2}(x, cx) + d'\chi_{n-2}(x, cx) + \varphi_{n-2}(x, cx);$$

le coefficient de $x^{n-2}$ est

$$d'^2 \psi_{n-2}(1, c) + d'\chi_{n-2}(1, c) + \varphi_{n-2}(1, c),$$

qui est nul.

La première équation est donc au plus de degré $n-3$ et la droite considérée rencontre bien la courbe en trois points à l'infini.

Par suite, le faisceau des deux asymptotes est

$$(y - cx)^2 \psi_{n-2}(1, c) + (y - cx)\chi_{n-2}(1, c) + \varphi_{n-2}(1, c) = 0.$$

On l'obtient pratiquement en prenant les termes de degré $n$, de degré $n-1$ et de degré $n-2$, en mettant $(y - cx)^2$ en facteur dans les premiers, $y - cx$ dans les seconds et en remplaçant dans les autres facteurs $x$ par 1 et $y$ par $c$.

Si, dans l'équation ainsi obtenue, on remplace $y - cx$ par $d$, on a l'équation aux ordonnées à l'origine $d'$ et $d''$ des asymptotes.

*Exemple.* — Soit la courbe

$$(x-y)^2(x+y)^2 + (x+y)(x-y)(2y-x) \\ - (3x-y)(2y+x) + x = 0.$$

Cherchons les asymptotes parallèles à $x - y = 0$. Prenons les trois premiers groupes du premier membre en y remplaçant $(x-y)^2$ par $d^2$, $x - y$ par $d$ et partout ailleurs $x$ et $y$ par 1, puisque le coefficient angulaire est 1. On a

$$4d^2 + 2d - 6 = 0, \qquad d' = 1, \qquad d'' = -\frac{3}{2}.$$

Les deux asymptotes sont

$$x - y - 1 = 0, \qquad x - y + \frac{3}{2} = 0.$$

On aurait de même les deux asymptotes parallèles à $x + y = 0$.

*Discussion.* — Si $d'$ et $d''$ sont imaginaires, on a un point double isolé. Si $d'$ et $d''$ sont réels et distincts, on a deux asymptotes parallèles tangentes à l'infini à deux branches de courbes réelles. Si l'équation en $d$ a une racine double, on a une asymptote double; la réalité des branches de courbe à l'infini dans ce cas sera discutée plus loin.

Tout se passe comme si la courbe était remplacée par la courbe auxiliaire :

$$(y - cx)^2 \psi_{n-2}(x, y) + (y - cx)\chi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) = 0.$$

*Position de la courbe par rapport à son asymptote.* — L'asymptote tangente en un point double à l'infini y rencontre la courbe en trois points au moins. Si les deux asymptotes sont distinctes, on peut écrire

$$y - cx - d' = \frac{-(y - cx)\chi_{n-2}(x, y) - \varphi_{n-2}(x, y) - \varphi_{n-3}(x, y) - \ldots}{(y - cx)\psi_{n-2}(x, y)} - d'.$$

On verrait alors, par le même raisonnement que dans le cas de l'asymptote simple, que le signe du premier membre pour $x$ infini est celui du second membre dans lequel on a remplacé $y$ par $cx + d'$ et que le numérateur de la fraction est alors un polynome de degré au plus égal à $n - 3$. Tout se passe donc alors comme si l'on considérait la courbe

$$(y - cx)^2 \psi_{n-2}(x, y) + (y - cx)\chi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-3}(x, y) = 0,$$

obtenue en prenant les quatre premiers groupes de l'équation proposée. La courbe précédente peut alors elle-même être remplacée par la suivante qui s'en déduit :

$$(y - cx - d')(y - cx)\psi_{n-2}(x, y) + \Phi_{n-3}(x, y) = 0.$$

Enfin cette courbe peut elle-même être remplacée par la courbe unicursale

$$d'(y - cx - d')\,\psi_{n-2}(1, c) + \frac{1}{x}\Phi_{n-3}(1, c) = 0.$$

Ce sont ces différentes transformations qu'on opère en agissant comme il est dit.

Si le degré du numérateur de la fraction obtenue s'abaissait au-dessous de $n - 3$, il faudrait alors prendre en plus dans l'équation le groupe $\varphi_{n-4}(x, y)$ et ainsi de suite; et, d'une manière générale, tout se passerait comme si l'on remplaçait à l'infini la courbe proposée par une courbe unicursale de la forme

$$d'(y - cx - d')\,\psi_{n-2}(1, c) + \frac{1}{x^p}\Phi_{n-p-2}(1, c) = 0.$$

*Exemple.* — Appliquons ce procédé à la courbe étudiée précédemment

$$\begin{aligned}(x - y)^2(x + y)^2 + (x + y)(x - y)(2y - x)&\\ - (3x - y)(2y + 2) + x &= 0\end{aligned}$$

et à son asymptote $x - y - 1 = 0$. On a

$$x - y = \frac{-(x + y)(x - y)(2y - x) + (3x - y)(2y + x) - x}{(x - y)(x + y)^2}.$$

D'où

$$x - y - 1 = \frac{\left\{\begin{aligned}&-(x + y)(x - y)(2y - x) + (3x - y)(2y + x)\\ &\qquad\qquad - x - (x - y)(x + y)^2\end{aligned}\right\}}{(x - y)(x + y)^2}.$$

Remplaçons dans le second membre $x$ par $y+1$, il se réduit, tous calculs faits, à

$$\frac{3y}{(2y+1)^2},$$

ce qui, pour $y$ infiniment grand, montre que la fonction $x-y-1$ est du signe de $y$ et, par suite, qu'à l'infini la courbe est par rapport à son asymptote dans la même région que l'origine du côté des $y$ négatifs et dans la région opposée du côté des $y$ positifs. La courbe coupe l'asymptote au point pour lequel $y=0$.

Si $d'=d''=d$, c'est-à-dire si l'asymptote est double, l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$(y-cx-d)^2\,\psi_{n-2}(x,y)+\varphi_{n-3}(x,y)+\ldots=0.$$

La discussion s'opère alors de la même façon que pour les tangentes doubles à l'origine.

Si $\varphi_{n-3}(1,c)\neq 0$, tout se passe comme si l'on avait la courbe

$$(y-cx-d)^2=-\frac{1}{x}\,\frac{\varphi_{n-3}(1,c)}{\psi_{n-2}(1,c)}.$$

Il y a rebroussement de première espèce à l'infini, dans la région des $x$ positifs ou négatifs suivant le signe du coefficient de $\frac{1}{x}$. La courbe auxiliaire a son équation résoluble en $y$ :

$$y=cx+d\pm\sqrt{-\frac{1}{x}\,\frac{\varphi_{n-3}(1,c)}{\psi_{n-2}(1,c)}}.$$

Si $\varphi_{n-3}(1,c)=0$ ou si $\varphi_{n-3}(x,y)$ est identiquement nul, on opère d'une façon générale comme pour les tangentes, et le procédé pratique de calcul peut s'énoncer de la façon suivante :

On met d'abord l'équation de la courbe sous la forme

$$(y - cx - d)^2 \psi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-p}(x, y) + \ldots,$$

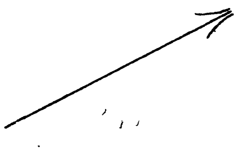
en remplaçant dans l'équation de la courbe ordonnée en groupes homogènes $(y - cx)^2$ par $(y - cx - d)^2$, puis en complétant l'équation par les termes ainsi ajoutés changés de signe; on conserve dans ce qui suit les groupes successifs en s'arrêtant au premier non divisible par $y - cx$.

1° *Le second groupe $\varphi_{n-p}(xy)$ n'est pas divisible par $y - cx$.* — On remplace, dans $\psi_{n-2}$ et dans $\varphi_{n-p}$, $y$ par $cx$, ce qui revient à prendre la courbe auxiliaire

$$(y - cx - d^2) = -\frac{1}{x^{p-2}} \frac{\psi_{n-2}(1, c)}{\varphi_{n-2}(1, c)}.$$

Si $p$ est impair, on a rebroussement de première espèce (*fig.* 1).

Fig. 1.



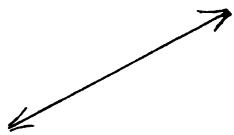
Si $p$ est pair, point double isolé à l'infini si le coefcient $A = -\frac{\psi_{n-2}(1, c)}{\varphi_{n-2}(1, c)}$ est négatif.

Si $p$ est pair et $A$ positif, on a deux branches de courbe tangentes à l'infini de part et d'autre de l'asymptote (*fig.* 2).

2° *Un certain nombre de groupes sont divisibles par $y - cx$.* — On cherche après le premier terme tous ceux consécutifs qui sont divisibles par $(y - cx)^2$ et l'on remplace comme précédemment $(y - cx)^2$ par

$(y - cx - d)^2$; dans les termes qui suivent, on remplace de même $y - cx$ par $y - cx - d$, de façon à

Fig. 2.



mettre l'équation sous la forme

$$\begin{aligned}&(y - cx - d)^2 \Psi_{n-2}(x, y)\\ &\quad + (y - cx - d)\Phi_{n-q}(x, y) + \mathrm{X}_{n-r}(x, y) + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Dans les trois polynomes $\Psi$, $\Phi$, X ainsi formés, on ne conserve que les groupes homogènes de plus haut degré et l'on y remplace $y$ par $cx$. On obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned}&(y - cx - d)^2 \psi_{n-2}(1, c)\\ &\quad + \frac{1}{x^{q-2}}(y - cx - d)\varphi_{n-q}(1, c) + \frac{1}{x^{r-2}}\chi_{n-r}(1, c) = 0.\end{aligned}$$

Enfin on décompose en une somme de carrés le trinome en $y - cx - d$ ainsi formé. S'il est carré parfait, on prend un groupe de plus dans l'équation. On le met ainsi, dans tous les cas, sous la forme

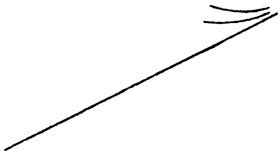
$$\left(y - cx - d - \frac{\mathrm{A}}{x^{q-2}}\right)^2 = \frac{\mathrm{B}}{x^h}.$$

Tout revient à remplacer la courbe proposée par la précédente.

*h impair.* — Rebroussement de seconde espèce (*fig.* 3).

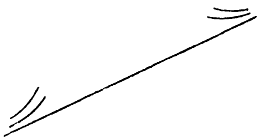
*h pair*. — Point double isolé si $B < 0$; contact double

Fig. 3.



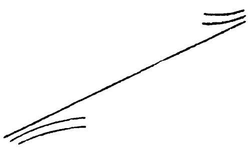
à l'infini si $B > 0$ [d'un même côté si $q$ pair (*fig.* 4);

Fig. 4.



de part et d'autre si $q$ impair (*fig.* 5)].

Fig. 5.



## III. — Point multiple d'ordre $p$.

La détermination des asymptotes se ferait de la même façon que pour le point double. L'équation est de la forme

$$(y - cx)^p \psi_{n-p} + (y - cx)^{p-1} \psi'_{n-p} + \dots \\ + (y - cx)\psi^{(p-1)}_{n-p} + \psi^{(p)}_{n-p} + \dots = 0.$$

En remplaçant dans les $p + 1$ premiers termes $y - cx$

par $d$, puis, dans les fonctions $\psi$, $x$ par 1 et $y$ par $c$, on aura l'équation aux ordonnées à l'origine des asymptotes. Pour avoir la position par rapport à l'une des asymptotes $y = cx + d$, on étudie comme précédemment le signe du facteur $y - cx - d$.

### IV. — Asymptotes parallèles aux axes.

La théorie précédente ne suppose pas $c \neq 0$ et s'applique encore aux asymptotes parallèles à $Ox$. Dans les différents groupes homogènes, on remplace donc $x$ par 1 et $y$ par 0.

*Exemple :*

$$y(y^2 - x^2) + x^2 - 2xy + 2y - x = 0.$$

On résout l'équation par rapport au facteur $y$ des termes de plus haut degré,

$$y = \frac{-x^2 + 2xy + \ldots}{y^2 - x^2}.$$

Pour $y = 0$, le second membre se réduit à 1. L'asymptote est

$$y - 1 = 0.$$

On retrouve ainsi la règle connue pour obtenir les asymptotes parallèles aux axes. Pour étudier la position de la courbe, on tire

$$y - 1 = \frac{-x^2 + 2xy - 2y + x}{y^2 - x^2} - 1 = \frac{2xy - 2y + x - y^2}{y^2 - x^2}.$$

Pour $y = 1$, le second membre, quand $x$ est infini, a le signe de $-\frac{1}{x}$, ce qui détermine la position par rapport à l'asymptote $y - 1 = 0$.

Pour les asymptotes parallèles à $Oy$, il suffit de changer $x$ en $y$ et $y$ en $x$ dans les raisonnements faits pour les asymptotes parallèles à $Ox$. Dans les groupes homogènes facteurs des diverses puissances de $x$, on remplacera donc $x$ par o et $y$ par 1.

## V. — Branches paraboliques.

Pour étudier les types de branches paraboliques, il est plus commode de supposer que la direction asymptotique est celle de $Ox$.

Quand la droite à l'infini est tangente ordinaire en un point simple, on a comme parabole asymptotique

$$y^2 = ax.$$

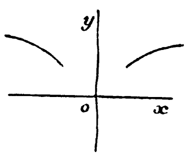
En coordonnées homogènes :

$$y^2 = axt;$$

sous cette forme, on voit que $t = 0$ rencontre en deux points : c'est la forme ordinaire des paraboles du second degré.

$y^3 = ax^2t$ donne un point d'inflexion sur la droite à l'infini, $t = 0$, qui rencontre en trois points confondus. Les branches infinies ont la disposition de la figure 6.

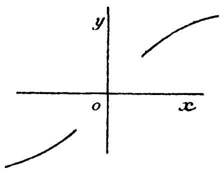
Fig. 6.




$y^3 = axt^2$ correspond à un point double à l'infini, avec rebroussement sur la droite à l'infini (*fig.* 7) qui doit être considérée comme une tangente double.

En général, le genre $y^p = ax^{p-1}t$ correspond à une branche simple du type des branches paraboliques du second degré, ou du type de la figure 6, suivant que $p$ est pair ou impair.

Fig. 7.




Le type $y^p = ax^{p-2}t^2$ correspond à un point double à l'infini; si $p$ est impair, on a la disposition de la figure 7; si $p$ est pair, par exemple,

$$y^4 = ax^2.$$

Pour $a > 0$, on a quatre branches paraboliques

$$y^2 = \pm x\sqrt{a},$$

symétriques par rapport à $Oy$.

Pour $y^6 = ax^4$, on aurait quatre branches du genre

$$y^3 = kx^2,$$

symétriques par rapport à $Oy$.

On voit aisément comment on étudie le cas général correspondant à

$$y^p = ax^{p-q}.$$

Nous allons nous proposer d'étudier, pour une direction quelconque, le genre de la branche parabolique et son amplitude par la grandeur du coefficient $a$.

Le même procédé permettrait de trouver le plus souvent une parabole d'équation simple asymptote à la courbe proposée, et la position par rapport à cette parabole; mais ce procédé n'est pratique que dans le cas d'une branche parabolique du premier ou du second type. On peut, dans le cas général, placer exactement la branche parabolique, sans qu'il soit nécessaire d'avoir une parabole asymptote.

Nous supposerons d'abord que dans une direction donnée, $y - mx = 0$, la droite de l'infini est seule tangente à la courbe à l'infini, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de branche hyperbolique dans la même direction.

I. *Droite de l'infini tangente en un point simple.* — L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - mx)^p \psi_{n-p}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

avec la condition $\varphi_{n-1}(1, m) \neq 0$. La droite de l'infini rencontre la courbe en $p$ points confondus; il y a inflexion graphique ou point méplat à l'infini suivant que $p$ est impair ou pair et supérieur à 2, contact simple si $p = 2$.

Toute courbe de la forme

$$(y - mx)^p + \lambda x^{p-1} = 0$$

a en commun, avec la courbe donnée, $p$ points à l'infini au point considéré; cherchons à déterminer $\lambda$ par la condition qu'un $(p+1)^{\text{ième}}$ point commun s'éloigne à l'infini. La courbe ainsi obtenue aura, par rapport à la droite de l'infini, même position que la courbe donnée et servira de courbe auxiliaire pour caractériser la forme de la branche parabolique à étudier. On peut écrire

$$\varphi_{n-1}(x, y) = (y - mx)\chi_{n-2}(x, y) + A x^{n-1},$$

A étant un coefficient numérique non nul. Soit de même

$$\psi_{n-p}(x, y) = (y - mx)\chi_{n-p-1}(x, y) + B x^{n-p}.$$

L'équation de la courbe donnée peut être remplacée par

$$-\lambda x^{p-1}[(y-mx)\chi_{n-p-1}(x,y)+Bx^{n-p}]$$
$$+(y-mx)\chi_{n-2}(x,y)+Ax^{n-1}+\ldots=0.$$

Déterminons $\lambda$ par la condition que

$$A=\lambda B.$$

Cette équation devient

$$(y-mx)[-\lambda x^{p-1}\chi_{n-p-1}(x,y)+\chi_{n-2}(x,y)]$$
$$+\varphi_{n-2}(x,y)+\ldots=0,$$

et la courbe donnée a bien, avec la courbe auxiliaire, $p+1$ points au moins communs à l'infini.

Pratiquement, on remarque que $Ax^{n-1}$ et $Bx^{n-p}$ sont les restes des divisions de $\varphi_{n-1}$ et de $\psi_{n-p}$ par $y-mx$, c'est-à-dire les résultats de la substitution de $mx$ à $y$ dans ces polynomes et l'on obtient la courbe auxiliaire par le procédé de résolution déjà employé pour les tangentes à l'origine et les asymptotes. On écrit

$$(y-mx)^p=-\frac{\varphi_{n-1}(x,y)+\ldots}{\psi_{n-p}(x,y)}.$$

La courbe auxiliaire est alors

$$(y-mx)^p=-\frac{\varphi_{n-1}(x,mx)}{\psi_{n-p}(x,mx)}=-\frac{\varphi_{n-1}(1,m)}{\psi_{n-1}(1,m)}x^{p-1},$$

courbe unicursale. Si $p$ est pair, il y a à l'infini deux branches de courbe de part et d'autre de la droite $y-mx=0$ et toutes deux du côté des $x$ positifs ou du côté des $x$ négatifs. Si $p$ est impair, il y a inflexion à l'infini, les deux branches sont l'une du côté des $x$ positifs, l'autre du côté des $x$ négatifs, toutes deux d'un même côté par rapport à la droite $y-mx=0$.

La courbe auxiliaire précédente fixe le genre de la branche parabolique considérée et permet de lui donner la même amplitude que celle de la parabole asymptotique. La recherche d'une parabole asymptote n'est possible pratiquement que dans les cas simples, par la détermination de la limite de $(y - mx)^p + \lambda x^{p-1}$.

On peut trouver la position par rapport à la courbe auxiliaire de la manière suivante, si l'on a besoin d'étudier plus complètement la branche de courbe considérée, en opérant toujours d'une manière analogue à celle qu'on emploierait pour une courbe unicursale.

On peut écrire

$$(y - mx)^p + \lambda x^{p-1}$$
$$= - \frac{\varphi_{n-1}(x, y) - \lambda x^{p-1} \psi_{n-p}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \ldots}{\psi_{n-p}(x, y)}.$$

Il résulte de la manière même dont $\lambda$ a été déterminé que ceci peut s'écrire

$$(y - mx)^p + \lambda x^{p-1}$$
$$= - \frac{(y - mx)\,\Phi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \ldots}{\psi_{n-p}(x, y)}.$$

Pour les valeurs de $x$ et de $y$ infiniment grandes, si $\Phi_{n-2}(1, m) \neq 0$, le second membre, donc aussi le premier, sont du signe de

$$-(y - mx)x^{p-2}\frac{\Phi_{n-2}(1, m)}{\psi_{n-p}(1, m)},$$

et l'on voit ainsi dans quelles régions du plan sont les branches de la courbe donnée par rapport à celles de la courbe auxiliaire. Si $\Phi_{n-2}(1, m) = 0$, on a

$$\Phi_{n-2}(x, y) = (y - mx)^\alpha\, Q(x, y)$$

et le signe est celui de

$$-(y - mx)^{\alpha+1}\, x^{p-\alpha}\frac{Q(1, m)}{\psi_{n-p}(1, m)}.$$

Enfin, si $\Phi_{n-2}(x, y)$ est identiquement nul, on opère de même sur le groupe suivant $\varphi_{n-2}(x, y)$ du numérateur.

*Exemple.* — Soit la courbe

$$(y - 2x)^2(x - y)^2 + (x^2 + y^2)(x + y) + \ldots = 0,$$

on a

$$(y - 2x)^2 = -\frac{(x^2 + y^2)(x + y) + \ldots}{(x - y)^2}.$$

La courbe auxiliaire est

$$(y - 2x)^2 = -15x,$$

parabole ayant ses branches infinies du côté des $x$ négatifs.

L'équation de la courbe peut s'écrire

$$(y - 2x)^2 + 15x = -\frac{(x^2 + y^2)(x + y) - 15x(x - y)^2}{(x - y)^2}$$
$$= -\frac{(y - 2x)(y^2 - 22xy + 7x^2) + \ldots}{(x - y)^2}.$$

Le second membre est du signe de $13(y - 2x)$, ce qui fixe la position de la courbe au-dessus et au-dessous du diamètre $y - 2x = 0$, par rapport à la parabole asymptotique.

II. *Droite de l'infini tangente en un point multiple.* — $(y - ax)^p$ étant en facteur dans les termes du plus haut degré, supposons que le point correspondant soit de multiplicité $q < p$. Cela veut dire qu'en remplaçant $y$ par $ax + \lambda$, l'équation en $x$ est de degré $p - q$.

Le genre de la branche parabolique est celui de

$$y^p = A x^{p-q}$$

et, dans le cas qui nous occupe,

$$(y - ax)^p = A x^{p-q}.$$

Proposons-nous de déterminer le signe et la valeur numérique de A, quand $x$ et $y$ augmentent indéfiniment, $\frac{y}{x}$ prenant la valeur $a$.

Pour qu'il n'y ait pas de branches hyperboliques, il faut que, si l'on coupe par $y = ax + \lambda$, l'annulation du coefficient de la plus haute puissance de $x$ ne donne pas de valeurs finies pour $\lambda$, c'est-à-dire que ce coefficient se réduise à une constante.

$y - ax$ peut être en facteur dans plusieurs groupes homogènes; il faut cependant que les groupes contenant ce facteur ne contiennent pas, en dehors de ce facteur, des termes de degré supérieur ou égal à $p - q$, sans quoi il y aurait une ou plusieurs branches hyperboliques.

Nous allons le montrer sur un exemple :

Soit la courbe

$$x^3(y - 2x)^4 - (y - 2x)^3(y + x)^3 \\ + (y - 2x)^2 x^3 - xy^3 + y^4 - x^2 = 0.$$

Si l'on coupe par $y - 2x = \lambda$, l'équation s'abaisse au quatrième degré; il y a point triple à l'infini.

Pour que l'équation aux $x$ de rencontre ait une racine de plus infinie, on annule le coefficient de la plus haute puissance de $x$, c'est-à-dire, dans ce cas, le coefficient de $x^4$. Pour qu'il n'y ait pas de valeurs finies de $\lambda$ satisfaisant à cette condition, il faut que le coefficient de $x^4$ soit une constante, ce qui a lieu parce que les facteurs multipliant $y - 2x$ ne sont pas de degré 4; il est évident que, si l'on mettait, par exemple, $(y - 2x)^2 x^4$ au lieu de $(y - 2x)^2 x^3$, il y aurait une asymptote à distance finie, donnée en annulant le coefficient de $x^4$ :

$$\lambda + 8 = 0.$$

Reprenons la courbe proposée. On peut écrire

$$(y - 2x)^4 = \frac{(y - 2x)^3 (y + x)^3 - (y - 2x)^2 x^3 + xy^3 - y^4 + x^2}{x^3}.$$

D'après un raisonnement déjà fait, pour $x$ et $y$ infinis, quand $\frac{y}{x}$ tend vers 2, le second membre se réduit au rapport des plus hautes puissances de $x$ :

$$-\frac{8x^4}{x^3} = -8x.$$

La branche parabolique a pour position et pour amplitude celle de la parabole

$$(y - 2x)^4 = -8x.$$

Dans le cas général,

$$(y - ax)^p = \frac{R(x, y)}{\varphi_{m-p}(x, y)} = Ax^{p-q} + \frac{k}{x^\alpha};$$

la parabole asymptotique est ainsi déterminée.

Pratiquement, on considère seulement les termes de plus haut degré ne contenant pas $y - ax$ en facteur. On forme le rapport de ces termes au coefficient de $(y - ax)^p$; on cherche la valeur de ce rapport quand $y$ est remplacé par $ax$, au numérateur ou au dénominateur, en ne conservant que les plus hautes puissances de $x$.

*Cas de branches hyperboliques et paraboliques dans la même direction.* — On cherche d'abord les asymptotes des branches hyperboliques et la position de la courbe, comme il a été dit précédemment, sans s'occuper des branches paraboliques; connaissant la multiplicité du point à l'infini et le nombre des points restant comme contacts avec la droite à l'infini, on en conclut le genre des branches paraboliques à étudier, c'est-à-dire le type de la branche parabolique asymptotique à déterminer.

Reprenons l'exemple précédent, modifié comme nous l'avons dit, pour qu'il y ait une branche hyperbolique,

$$x^3(y-2x)^4-(y-2x)^3(y+x)^3 \\ +(y-2x)x^4-xy^3+y^4-x^2=0,$$

on étudierait, par les procédés employés pour les branches hyperboliques, la position par rapport à l'asymptote ordinaire

$$y-2x=-8.$$

La droite à l'infini reste tangente double; il faut donc chercher une parabole asymptotique de la forme

$$(y-2x)^3=\lambda x.$$

Posons $\lambda=A^3$ pour simplifier l'écriture :

$$y=2x+Ax^{\frac{1}{3}}.$$

Il faut déterminer A pour que cette parabole rencontre la courbe en un point de plus à l'infini, en annulant le coefficient de la plus haute puissance de $x$ dans l'équation aux $x$ de rencontre.

Il est évident que ce coefficient ne pourra provenir que du premier terme $x^3(y-2x)^4$ et du terme $(y-2x)x^4$; dans le cas général, il est aisé de voir également le résultat de la substitution. Tout revient donc, dans la pratique, à considérer le groupe de termes correspondant, soit ici

$$(y - 2x)^4 x^3 + (y - 2x) x^4 = 0,$$

ce qui donne la parabole asymptotique

$$(y - 2x)^3 + x = 0,$$

et permet de fixer la position de la courbe.

Le plus souvent, la simple inspection de l'équation permet de déterminer la parabole asymptotique, parce que l'étude des points sur la droite à l'infini donne exactement le type de la branche parabolique étudiée. Le procédé est particulièrement simple dans le cas où la direction asymptotique est $Ox$ ou $Oy$.