NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. PADÉ

Sur la propriété de concavité de l'herpolhodie de Poinsot

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 303-307

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__303_1>

[R8aα]

SUR LA PROPRIÉTÉ DE CONCAVITÉ DE L'HERPOLHODIE DE POINSOT;

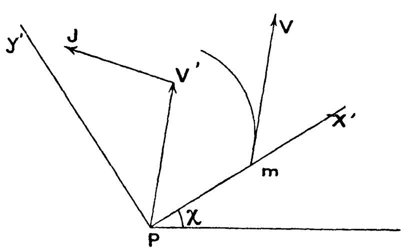
PAR M. H. PADÉ.

1. « La propriété de l'herpolhodie de Poinsot, de n'avoir pas de rebroussements et d'être toujours con-

cave vers le pôle des coordonnées, peut être établie sans faire aucun emprunt à la théorie de la courbure et par les seuls moyens élémentaires de la mécanique classique.

» Il suffit de démontrer que la vitesse du point qui décrit l'hodographe correspondant au mouvement du pôle instantané sur l'herpolodie, vitesse qui est équipollente à l'accélération de ce pôle, a un moment de signe invariable autour du pôle des coordonnées, pris pour centre de cette hodographe. » (*Soc. des sc. phys. et nat. de Bordeaux*, séance du 5 avril 1906.)

2. Soient :



m la position, à l'instant t, sur l'herpolhodie qu'il décrit, du pôle instantané ;

P le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur le plan fixe tangent en m à l'ellipsoïde d'inertie ;

ρ, χ les coordonnées polaires du point m, le point P étant le pôle de ces coordonnées ;

Px', Py' deux axes rectangulaires dont le premier coïncide avec Pm, et tels que $\widehat{x'\,\mathrm{P}y'} = +\frac{\pi}{2}$;

mV la vitesse de m ;

PV' le vecteur équipollent à cette vitesse ; V' décrit l'hodographe du mouvement de m ;

J la vitesse de V', accélération de m.

3. L'herpolhodie n'aura pas d'inflexions [Gilbert, *Sur quelques formules d'un usage général dans la physique mathématique* (*Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles*, 14e année, 1890)], si l'angle que fait le vecteur mV avec une direction fixe quelconque du plan de la figure varie toujours dans le même sens; elle n'aura pas de rebroussements, si le vecteur mV n'est jamais nul.

Ces deux conditions seront simultanément réalisées, si *le moment de* J *autour de* P *conserve un signe invariable pendant toute la durée du mouvement* : nous allons constater qu'il en est effectivement ainsi.

4. Dans le système d'axes Px', Py', les coordonnées de V$'$ sont :

$$\frac{d\rho}{dt}, \quad \rho\frac{d\chi}{dt};$$

les projections de J, vitesse de V$'$, sont :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\chi}{dt}\right).$$

Nous devons faire voir que le moment M de J autour de P, savoir :

$$\text{(A)} \qquad \text{M} = \frac{d\rho}{dt}\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\chi}{dt}\right) - \rho\frac{d\chi}{dt}\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2\right]$$

a un signe invariable.

Au moyen des équations du mouvement du point M, cette quantité s'exprime aisément en fonction de ρ seulement.

5. Soient :

A, B, C les moments principaux d'inertie autour du point fixe ;

μ, D deux constantes positives ;
ε le nombre $+1$ ou -1 ;

$$a = -\frac{(B-D)(C-D)}{BCD}, \qquad b = -\frac{(C-D)(A-D)}{CAD},$$

$$c = -\frac{(A-D)(B-D)}{ABD};$$

$$\varphi(\rho^2) = -D(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c);$$

$$E = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD}.$$

Les équations qui déterminent ρ et χ en fonction de t sont (*Nouv. Ann. de Math.*, 4^e série, t. III, juillet 1903, p. 289) :

$$\left\{\begin{aligned} \rho\,\frac{d\rho}{dt} &= \varepsilon\mu\sqrt{\varphi(\rho^2)}, \\ \rho^2\,\frac{d\chi}{dt} &= \mu(\rho^2 + E). \end{aligned}\right.$$

Elles donnent immédiatement

$$\rho\,\frac{d\rho}{dt}\,\frac{d}{dt}\left(\rho^2\,\frac{d\chi}{dt}\right) = 2\mu^3\varphi(\rho^2)$$

$$\rho\,\frac{d^2\rho}{dt^2} = \mu^2\varphi'(\rho^2) - \frac{\mu^2\varphi(\rho^2)}{\rho^2};$$

d'où, en substituant dans (A),

$$\text{(B)}\quad M = \frac{\mu^3}{\rho^4}\left[(3\rho^2 + E)\varphi(\rho^2) - \rho^2(\rho^2 + E)\varphi'(\rho^2) + (\rho^2 + E)^3\right].$$

6. Posons

$$\varphi(\rho^2) = -D(\rho^6 - \alpha\rho^4 + \beta\rho^2 - \gamma),$$

en sorte que

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= a + b + c, \\ \beta &= bc + ca + ab, \\ \gamma &= abc; \end{aligned}\right.$$

après des réductions immédiates, et en tenant compte de ce que

$$E^2 + abc\,D = E^2 + \gamma\,D = 0,$$

on trouve :

$$(\mathrm{C})\quad M = \mu^3\,[(2DE + \alpha D + 1)\,\rho^2 - (2D\beta + \alpha DE - 3E)]\,;$$

ou, en remplaçant α et β par leurs valeurs en A, B, C, D :

$$(\mathrm{D})\quad \left\{ \begin{aligned} M &= \frac{\mu^3 D^2}{ABC}\,[(A+B+C-2D)\,\rho^2 + (A+B+C)E] \\ &= \frac{\mu^3 D^3 \rho^2}{ABC}\left[(A+B+C)\,\frac{\rho^2+E}{D\rho^2} - 2\right]. \end{aligned} \right.$$

7. La quantité M se trouve ainsi mise sous la forme d'un produit de deux facteurs.

Le premier de ces facteurs, qui n'est nul que quand l'herpolhodie est réduite à un seul point, cas que nous laissons naturellement de côté, est essentiellement positif.

Pendant le mouvement, ρ^2 demeure une moyenne entre a, b, c ; la quantité $\frac{\rho^2+E}{D\rho^2}$ est une moyenne entre

$$\frac{a+E}{Da},\quad \frac{b+E}{Db},\quad \frac{c+E}{Dc},$$

ou, simplement,

$$\frac{1}{A},\quad \frac{1}{B},\quad \frac{1}{C};$$

le second facteur est donc une moyenne entre

$$\frac{B+C-A}{A},\quad \frac{C+A-B}{B},\quad \frac{A+B-C}{C},$$

quantités essentiellement positives.

Donc M garde un signe invariable.