Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 33-41

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__33_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir le théorème de Lagrange et Dirichlet sur la stabilité d'un système dépendant d'une fonction de forces et d'un nombre fini de paramètres.*

II. *Un ressort de masse négligeable communique à un pendule pesant un moment de rappel proportionnel à l'angle d'écart au point mort du ressort.*

1° *Calculer la position d'équilibre et la durée des petites oscillations exécutées autour de cette position par le pendule ainsi modifié.*

2° *En supposant petite l'action de la pesanteur par rapport à celle du ressort, étudier, par la méthode de la variation des constantes, les grandes oscillations du système, et déterminer leur durée en fonction de la demi-amplitude en cours prise par rapport à la position du point mort du ressort.*

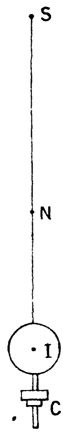
3° *Comparaison de deux écarts extrêmes consécutifs.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule constitué d'une tige très mince et d'une sphère de* 10^{cm} *de rayon est muni d'un petit curseur dont la masse est à celle de la sphère dans le rapport de* 1 *à* 43,2.

On demande :

1° *Au-dessous de quel niveau* N *on placera le curseur pour être assuré que toute descente du curseur ralentira les battements du pendule?*

2° *Après avoir placé le curseur au-dessous et près de la sphère, quel ébat faut-il ménager au curseur pour que cet*



ébat soit capable de corriger un écart de marche de ± 15 *battements du pendule sur* 86400 *battements.*

La distance de l'axe de suspension au centre de la sphère est 1^m; *la masse de la tige est regardée comme négligeable; le pendule est supposé placé à température constante.*

(Juin 1905.)

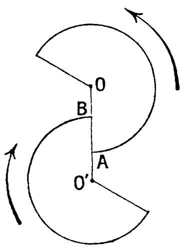
ÉPREUVE ÉCRITE. — I. 1° *Théorème des moments des quantités de mouvement.*

2° *Un ensemble de points matériels est soumis à des forces mutuelles dont le potentiel est une fonction uniforme de la configuration intrinsèque du système; démontrer que, si cet ensemble a toutes ses vitesses nulles au départ, il ne pourra reprendre plus tard sa* CONFIGURATION

INITIALE *que s'il retrouve en même temps son* ORIENTATION INITIALE.

II. *On considère une tige homogène pesante s'appuyant avec frottements sur l'intérieur d'une demi-sphère creuse et sur le bord de la circonférence horizontale qui limite la surface sphérique supérieurement; former les équations qui feront connaître les inclinaisons extrêmes de la tige sur l'horizon entre lesquelles se répartiront les inclinaisons de la tige maintenue en équilibre dans le plan d'un même grand cercle vertical de la sphère. Le coefficient des deux frottements est f.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux cames à profils rectilignes sont portées par deux solides en rotations parallèles et de*



sens contraires autour de deux axes O *et* O'. *Soient* ω *et* ω' *les vitesses angulaires des deux solides à un instant donné. On demande :*

1° *D'étudier comment varie le rapport* $\frac{\omega}{\omega'}$ *durant la conduite de la came* O *par la came* O'.

2° *De calculer les angles* α *et* α' *dont tournent alors les deux solides pendant la conduite depuis l'instant où les deux profils formaient une seule et même droite perpendiculaire commune aux deux axes.*

Données :

Distances des axes OO'	....	50^{cm}
Distances des becs des deux profils à leurs axes respectifs	OA......	40
	OB.......	30

(Novembre 1905.)

Bordeaux.

Epreuve écrite. — I. *Accélération. Accélérations tangentielle et centripète. Determination de l'accélération dans un système de coordonnées curvilignes quelconques; application aux coordonnées polaires dans le plan et dans l'espace.*

II. *Mouvement d'une barre soumise à des liaisons sans frottements et attirée par un point fixe.*

La barre est homogène et pesante; l'extrémité B *glisse sur un cercle vertical, l'extrémité* F *est articulée en un point de l'arc du cercle. Le point le plus elevé* A *du cercle attire les éléments de la barre proportionnellement à la distance et à la masse.*

On déterminera les forces de liaisons auxquelles la barre est soumise en B *et* F.

Epreuve pratique. — *Un solide homogène a la forme d'une pyramide dont la base* ABC *est un triangle équilatéral, et dont la hauteur est* SA, S *désignant le sommet. Déterminer le rayon de giration autour de l'arête* SB :

$$AB = 1^{m}, \qquad SA = 2^{m}.$$

(Juillet 1905.)

Epreuve écrite. — I. *Pendule composé.*

II. *Mouvement d'un disque qui a un point fixe et d'une chaine placée sur sa périphérie.*

Le disque, circulaire et de rayon R, *homogène et pesant, est mobile sans frottements dans un plan vertical, autour d'un des points* O *de sa circonférence.*

La chaine, homogène et pesante, glisse sans frottements sur une gorge pratiquée à la périphérie du disque.

Cas où, à l'origine du temps, le système est immobile.

Epreuve pratique. — *Calculer l'énergie cinétique d'un disque circulaire homogène, pesant* $3^{kg},623$ *et roulant sans glisser sur une route horizontale, de telle sorte que son* *centre de figure parcoure uniformément* 100^{m} *en* 4 *minutes :*

$$g = 9{,}809 \text{ mètres-secondes.}$$

Exprimer le résultat en unités communes et en unités C. G. S. (Novembre 1905.)

Grenoble.

Epreuve écrite. — *Une barre homogène* OA, *de masse* M, *de longueur* l, *est mobile autour de son extrémité* O *qui est fixe. L'autre extrémité* A *est attirée par un point fixe* B *situé également à une distance* l *du point* O. *L'attraction est inversement proportionnelle au cube de la distance; c'est, d'ailleurs, la seule force donnée.*

1° *Former les équations du mouvement de la barre.*

2° *Discuter ce mouvement, en supposant qu'à l'instant initial la barre est lancée tangentiellement au plan perpendiculaire à* OB *passant par* O.

3° *Dans ce même cas particulier, déterminer explicitement en fonction du temps les cosinus de l'angle* AOB.

Epreuve pratique. — *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires. Les six plans*

$$\begin{array}{ll} x = a, & x = -a, \\ y = a, & y = -a, \\ z = c, & z = -c \end{array}$$

déterminent un parallélépipède rectangle. Ce parallélépipède limite un solide homogène S *dont la masse est* M.

A l'instant initial, le solide S *est animé d'une rotation* ω *autour d'un axe* OR, *situé dans le plan* xOz, *faisant avec* Oz *un angle* α. *Dans l'espace, cet axe* OR *est dirigé suivant la verticale descendante.*

1° *Déterminer, à cet instant, la force vive de* S *et le moment résultant, relatif à* O, *des quantités du mouvement de* S.

2° *Le solide étant abandonné à l'action de son poids* (*et n'étant soumis à aucune liaison*), *déterminer le mouvement ultérieur par le mouvement du centre de gravité et* *les éléments du mouvement autour du centre de gravité (cônes roulettes, vitesses angulaires). Quels seront, au bout du temps t_1, les angles d'Euler définissant l'orientation du trièdre* Oxyz *par rapport à un autre trièdre dont les axes ont des directions fixes que l'on choisira convenablement.*

3° *Application numérique :*

$$M = 3, \qquad a = \sqrt{2}, \qquad b = 1, \qquad \omega = 30, \qquad t_1 = 1$$

(*unités* C. G. S.). OR *est bissectrice intérieure de* xOy.

(Novembre 1905.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Appliquer les équations générales d'équilibre d'un fil flexible, inextensible et sans torsion à la recherche de la figure d'équilibre d'un fil pesant homogène librement suspendu par ses deux extrémités.*

II. *Un tube circulaire, homogène, pesant, de très petite section, est assujetti à glisser sans frottement sur une droite horizontale* Ox. *A l'intérieur du tube glisse sans frottement un point pesant de masse égale à celle du tube.*

Étudier le mouvement, en supposant qu'à l'instant initial le système est abandonné dans le plan vertical de Ox *avec des vitesses dirigées dans ce plan.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer la vitesse d'une balle de revolver d'après les observations suivantes faites à la balance balistique :*

1° *La balle produit une déviation maxima de* 13°40′, *la distance de la ligne de tir à l'axe de rotation étant de* $14^{cm},2$; *la durée d'oscillation est de* $6^s,7$.

2° 50^g *suspendus au levier à* 40^{cm} *de l'axe de suspension donnent une déviation permanente de* 14°20′.

La masse de la balle est de $5^g,7$.

N. B — *On établira sommairement la formule qui détermine la vitesse demandée.* (Novembre 1905.)

Montpellier.

Epreuve écrite. — *Un ellipsoïde, homogène et pesant, dont la masse est égale à 5, a pour équation par rapport à ses axes de symétrie*

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

Cet ellipsoïde étant immobile et s'appuyant sur un plan horizontal fixe par l'un des sommets de son grand axe, on lui imprime, au point de coordonnées

$$x = -\sqrt{\frac{96}{167}}, \qquad y = \sqrt{\frac{270}{167}}, \qquad z = 0,$$

une percussion ayant pour composantes

$$X = -\sqrt{\frac{835}{18}}, \qquad Y = 0, \qquad Z = \sqrt{\frac{167}{6}}.$$

Quel mouvement prend le solide?

Epreuve pratique — *Une barre pesante* AB *repose tangentiellement sur une courbe dont le plan est vertical, et appuie son extrémité* A *contre un plan vertical perpendiculaire au premier. Déterminer la courbe de manière que la barre reste en équilibre, quel que soit son point de contact.*

Il n'y a pas de frottement. (Novembre 1905.)

Toulouse.

Epreuve écrite. — I. *Les extrémités d'une tige homogène pesante* AB *de longueur* $2l$ *sont assujetties à se mouvoir, la première sur une horizontale* Ox, *la seconde sur une verticale* Oy. *Le système tout entier tourne autour de* Oy *avec une vitesse angulaire constante* ω.

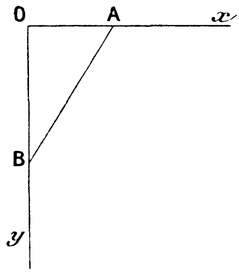
On demande :

1° *De former les équations du mouvement relatif de la barre dans le plan* xOy.

2° *De trouver la position d'équilibre relatif de la barre. Cet équilibre est-il stable ou instable?*

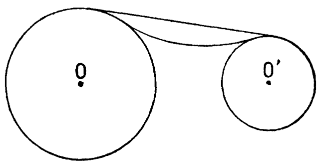
3° *Dans le cas où l'équilibre est stable, d'étudier le mouvement de la barre autour de cette position d'équilibre.*

4° *De calculer les réactions aux points* A *et* B.



On néglige le frottement des extrémités A *et* B *sur* Ox *et* Oy.

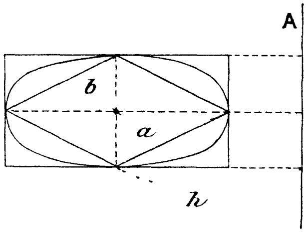
II. *Deux poulies homogènes situées dans un même plan vertical tournent autour de deux axes parallèles* O *et* O'



avec des vitesses angulaires estimées dans un même sens de rotation égales à ω_0 *et* ω'_0.

Un fil non tendu s'enroule sur les deux poulies. A un moment donné le fil se tend de telle sorte que les mouvements des deux poulies qui étaient indépendants deviennent brusquement solidaires l'un de l'autre. On suppose que la tension du fil persiste après le choc, et l'on demande ce que deviennent les vitesses angulaires des deux poulies. On donne les rayons des deux poulies R *et* R', *les moments d'inertie* μ *et* μ'.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Comparer les moments d'inertie relativement à leur axe commun* A *des trois anneaux homogenes engendrés par la révolution simultanee d'une*



ellipse, de son rectangle circonscrit, de son losange inscrit autour d'une droite A *parallèle au petit axe de l'ellipse.*

(Novembre 1905.)