NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACQUANT

Note sur l'hyperbole équilatère inverse d'une droite *OS* par rapport à un triangle *ABC* et sur le triangle pédal du point *S*

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 392-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__392_1>

[$L^1 1b$]

NOTE SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE INVERSE D'UNE DROITE OS PAR RAPPORT A UN TRIANGLE ABC ET SUR LE TRIANGLE PÉDAL DU POINT S;

Par M. A. VACQUANT.

Cette Note peut faire suite à un article de M. G. Fontené, complété par un article de M. R. B. (*N. A.*, 1906, p. 55 à 61). En conservant les notations de M. Fontené, on peut énoncer la question de la façon suivante :

Soit DEF *le triangle pédal relatif au point* S *et au triangle* ABC *inscrit dans le cercle de centre* O; *soient* M, N, P *les milieux des côtés du triangle* ABC; *soient* a, b, c *les intersections des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MN *et* DE, *les trois droites* Da, Eb, Fc *concourent en un même point* K′ *qui reste le même quand le point* S *décrit une droite* OΔ. *Si* S_1 *et* S_2 *sont les points de rencontre de* OΔ *avec le cercle* O *circonscrit au triangle* ABC, K′ *est le point de rencontre des droites de Simson* Δ_1 *et* Δ_2 *relatives à* S_1 *et* S_2, *et* K′ *est le centre de l'hy-*

perbole équilatère inverse de $O\Delta$ *par rapport au triangle* ABC.

Quand le point S décrit la droite $O\Delta$, la droite DE enveloppe une parabole tangente aux droites CA, CB et MN, car les divisions D et E, semblables à la division S, sont semblables, et, quand S vient en O, DE devient MN. La tangente variable DE à cette parabole détermine sur les tangentes fixes MN et BC des divisions homographiques c et D qui sont semblables. D'autre part, les divisions F et D sont semblables, comme semblables à la division décrite par S sur $O\Delta$; les divisions F et c, semblables à la division D, sont semblables, et comme les droites BA et MN décrites respectivement par les points F et c sont parallèles, la droite Fc passe par un point fixe K'. En supposant le point S en S_1 ou S_2 sur le cercle circonscrit au triangle ABC, les points correspondants D_1, E_1, F_1 sont en ligne droite, ainsi que D_2, E_2, F_2; ces deux droites Δ_1 et Δ_2, étant les droites de Simson relatives à deux points S_1 et S_2 diamétralement opposés du cercle O, sont rectangulaires. Le point K' est donc le point d'intersection des droites de Simson Δ_1 et Δ_2. On verrait de même que les droites Eb et Da passent par K' quand S décrit $O\Delta$. Donc Da, Eb, Fc concourent en K'.

Je dis maintenant que K' est le centre de l'hyperbole équilatère inverse de OS. Pour le voir, considérons l'hyperbole équilatère η définie par ses asymptotes $K'\Delta_1$, $K'\Delta_2$ et le point A. Comme N est le milieu de E_1E_2 et de AC, cette hyperbole passera par C; de même, elle passera par B; étant circonscrite au triangle ABC, elle passera par l'orthocentre H de ce triangle. D'autre part, la conique η_1, inverse de la droite $O\Delta$, passe par A, B, C et H, car H est l'inverse de O ; c'est donc une hyperbole équilatère, comme on le voit autrement en remarquant que les directions asymptotiques de η_1 sont Δ_1 et Δ_2, car, si S' est l'inverse de S, on sait que AS' est perpendiculaire à EF ; quand S vient en S_1, son inverse S'_1 est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite E_1F_1 ou Δ_1, c'est-à-dire dans la direction Δ_2 ; de même, quand S vient en S_2, S'_2 est à l'infini dans la direction Δ_1. Les hyperboles équilatères η et η_1, ayant quatre points communs A, B, C, H et mêmes directions asymptotiques, coïncident.

Enfin, on sait que le point K' appartient à la fois au cercle circonscrit au triangle MNP et au cercle circonscrit au triangle DEF ; généralement, on peut dire que les cercles circonscrits aux triangles tels que DEF passent par le point fixe K' quand S décrit $O\Delta$. En particulier, cette importante propriété du point K' a été démontrée élémentairement par M. R. B. dans l'article déjà cité (*N. A.*, 1906, p. 59).