Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 46-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__46_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1664.

(1894, p. 2*.)

Une courbe du quatrième ordre, qui a trois points doubles, admet généralement quatre tangentes doubles, qui forment quatre triangles homologiques du triangle déterminé par les points doubles. (ERNEST DUPORCQ.)

1665.

(1894, p. 2*)

Si trois cercles sont inscrits à un triangle, les quatrièmes tangentes communes qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un triangle homologique du premier.

(ERNEST DUPORCQ.)

SOLUTIONS

Par M. THIÉ.

La démonstration de la proposition 1665 est immédiate. Supposons par exemple que les trois cercles dont il s'agit soient les trois cercles *exinscrits* : alors on voit tout de suite que les côtés du triangle formé par les quatrièmes tangentes communes rencontrent les côtés du triangle donné aux pieds des bissectrices extérieures de ce dernier. Ces pieds sont en ligne droite, donc, etc.

Voici maintenant comment on peut rattacher l'énoncé 1664 au précédent.

On voit d'abord, par le même raisonnement élémentaire, que :

Si trois cônes de révolution sont inscrits à un même trièdre, les quatrièmes plans tangents communs qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un trièdre homologique du premier.

Dans cette proposition, remplaçons les mots *cônes de révolution* par *cônes touchant un même cône suivant deux arêtes,* pour avoir une généralisation projective; effectuons ensuite une transformation par polaires réciproques, et prenons enfin la trace de la figure obtenue sur un plan quelconque : on aboutit à l'énoncé suivant :

Soient ABC *un triangle et* S *une conique quelconques. Il existe quatre coniques passant par les points* A, B, C *et bitangentes à* S. *Trois de ces coniques se coupent, deux à deux, en trois points qui sont les sommets d'un triangle homologique à* ABC.

Effectuons alors une transformation quadratique ayant ABC pour triangle fondamental ; S devient une biquadratique S′ ayant trois points doubles en A, B, C. Les quatre coniques bitangentes à S deviennent les quatre bitangentes de S′. Trois d'entre elles forment bien un triangle homologique à ABC, en vertu de ce théorème :

Si trois points sont les sommets d'un triangle homologique au triangle fondamental d'une transformation quadratique, il en est de même de leurs transformés.

Cette dernière proposition est bien connue, quand la transformation quadratique considérée est l'*inversion par rapport à un triangle.* Il suffit d'une transformation homographique pour avoir l'énoncé général.