Nouvelles annales de mathématiques

Eugène Fabry

Sur la série de Taylor et ses points singuliers

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 503-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__503_1>

[D3bα]

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR ET SES POINTS SINGULIERS ;

PAR M. EUGENE FABRY.

On sait qu'une série de Taylor représente une fonction analytique qui a, au moins, un point singulier sur la circonférence de convergence. Ce théorème, qui résulte des propriétés des fonctions analytiques, peut se déduire directement de l'ordre de grandeur des coefficients par rapport au rayon de convergence, et des relations bien connues sur l'ordre de grandeur du module maximum.

Soit la série

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

dont le rayon de convergence est supposé ramené à 1. La plus grande limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ est alors égale à 1; c'est-à-dire que, quel que soit ε, on a

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1 + \varepsilon,$$

à partir d'un rang déterminé et

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 - \varepsilon,$$

pour une infinité de valeurs de n.

Soit

$$z = re^{\omega i},$$

où

$$r < 1, \qquad \omega = \frac{2k\pi}{\mu},$$

k prenant les μ valeurs entières de 0 à $\mu - 1$. Formons la somme

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-km\frac{2\pi i}{\mu}} f\left(re^{k\frac{2\pi i}{\mu}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{k(n-m)\frac{2\pi i}{\mu}},$$

où $\mu > m$. Le coefficient de $a_n r^n$ est une progression géométrique dont la somme est nulle lorsque $\frac{n-m}{\mu}$ n'est pas entier; elle est égale à μ lorsque $n - m$ est un multiple de μ. On a donc

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-km\frac{2\pi i}{\mu}} f\left(re^{k\frac{2\pi i}{\mu}}\right) = a_m r^m + a_{m+\mu} r^{m+\mu} + a_{m+2\mu} r^{m+2\mu} + \ldots;$$

r étant fixe, soit M le maximum du module de $f(re^{\omega i})$ lorsque ω varie de o à 2π. On a

$$\mathrm{M} > \left| \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-km\frac{2\pi i}{\mu}} f\left(re^{k\frac{2\pi i}{\mu}}\right) \right|$$

$$> |a_m r^m| - |a_{m+\mu} r^{m+\mu} + a_{m+2\mu} r^{m+2\mu} + \ldots|;$$

μ peut être choisi assez grand, pour que le dernier terme soit aussi petit que l'on voudra, puisque la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Donc

$$\mathrm{M} \geqq |a_m r^m|.$$

Sur une circonférence de rayon r, inférieur à 1, il y a un point tel que $|f(re^{\omega i})|$ soit au moins égal au module d'un terme quelconque $a_n r^n$.

Dans le cas où la série $\sum |a_n|$ est convergente, on peut, dans cet énoncé, supposer $r = 1$.

Si les coefficients a_n ne restent pas finis, la plus grande limite de $|a_n|$ étant infinie, soit A un nombre quelconque, aussi grand que l'on voudra. Il existe des termes tels que $|a_n| > 2\,\mathrm{A}$. n étant ainsi fixé, prenons r compris entre $\frac{1}{2^n}$ et 1, alors

$$|a_n r^n| > \mathrm{A}$$

et, sur la circonférence de rayon r, il y a un point tel que

$$|f(re^{\omega i})| \geqq |a_n r^n| > \mathrm{A}.$$

Il y a donc, dans la circonférence de convergence, des valeurs de z telles que $|f(z)|$ dépasse tout nombre donné. Et il y a au moins un point singulier sur la circonférence.

Si les coefficients a_n restent finis, mais ne tendent pas tous vers zéro, na_n ne reste pas fini. Il en résulte que la dérivée $f'(z)$ ne reste pas finie sur la circonférence de convergence.

Enfin, si $n^p a_n$ ne reste pas fini, p étant un entier positif,

$$(2) \qquad f_p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)a_n z^{n-p}$$

ne reste pas fini sur la circonférence de rayon 1; cette fonction a, au moins, un point singulier sur la circonférence, et aussi $f(z)$.

Si $\dfrac{L\left|\frac{1}{a_n}\right|}{Ln}$ n'augmente pas indéfiniment avec toute suite de valeurs de n, c'est-à-dire s'il existe une suite infinie de valeurs de n telles que $\dfrac{L\left|\frac{1}{a_n}\right|}{Ln}$ reste fini, il existera un nombre p tel que, pour ces valeurs de n,

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < n^p$$

et $f_{p+1}(z)$ ne restera pas fini sur la circonférence de rayon 1.

Supposons donc que $\dfrac{L\left|\frac{1}{a_n}\right|}{Ln}$ augmente indéfiniment avec n, pour toute suite infinie de valeurs de n. Quel que soit p, $|a_n|n^{p+2}$ tend vers zéro, et la série (2) est absolument convergente sur la circonférence de rayon 1. Il en résulte que le maximum du module de $f_p(e^{\omega i})$ est au moins égal à

$$n(n-1)\ldots(n-p+1)|a_n|,$$

quel que soit n.

Si la fonction $f(z)$ n'avait aucun point singulier sur la circonférence de rayon 1, le développement

$$f(z+h)=f(z)+hf'(z)+\dots+\frac{h^p}{p!}f_p(z)+\dots,$$

où $|z|=1$, aurait un rayon de convergence supérieur à zéro, et $\sqrt[p]{\left|\frac{f_p(z)}{p!}\right|}$ aurait une plus grande limite finie. Il existerait alors un nombre fini A tel que, quel que soit p, on ait

$$|f_p(z)| < A^p \times p!,$$

tant que $|z|=1$; le module maximum de $f_p(e^{\omega i})$ serait alors inférieur à $A^p \times p!$ et l'on aurait

$$|a_n|n(n-1)\dots(n-p+1) < M < A^p \times p!$$

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{A^p} \times \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!};$$

en donnant à p les valeurs $1, 2, \dots, n$,

$$n\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{n}{1}\frac{1}{A}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{A^2}+\dots+\frac{1}{A^n}=\left(1+\frac{1}{A}\right)^n-1,$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{a_n}\right|} > \left(1+\frac{1}{A}\right)\sqrt[n]{\frac{1-\left(1+\frac{1}{A}\right)^{-n}}{n}},$$

expression qui tend vers $1+\frac{1}{A}$ lorsque n devient infini.

La plus grande limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ serait au plus égale à $\frac{A}{1+A}$ et le rayon de convergence de la série 1 serait

$$\rho \geqq \frac{1+A}{A} > 1.$$

S'il n'y avait aucun point singulier sur la circonférence de rayon 1, le rayon de convergence serait supérieur à 1. Donc, dans tous les cas, il y a au moins un point singulier sur la circonférence de convergence.