Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 514-520

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__514_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Construire la courbe lieu des points dont les coordonnées rectangulaires ont pour expressions*

$$x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \qquad y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

II. *Étant donnée la parabole* P, $y^2 = 2px$, *former l'équation de la parabole* Q *obtenue en transportant* P *parallèlement à elle-même de manière que son sommet vienne en un point* M(α, β). *Supposons que le point* M *décrive la parabole*

$$y^2 + 2px = 0,$$

les paraboles Q *formeront une famille de courbes : trouver leurs trajectoires orthogonales.*

III. *Un point* M, *de masse* m, *assujetti à se mouvoir sur une circonférence de rayon* a, *est attiré vers un point* O *de la courbe par une force* $m\omega^2 r$, r *désignant la distance* OM. *A l'instant initial, cette distance est* $a\sqrt{2}$ *et la vitesse, égale à* $a\omega\sqrt{2}$, *a un sens tel que le mobile se rapproche du point* O. *On demande le mouvement du point* M *et la pression qu'il exerce sur la circonférence.*

Résultats de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sin\theta, \qquad N = 2m\omega^2 a(3\sin^2\theta - 1).$$

CALCUL. — *Étant donnée une sphère de* 1^m *de rayon, calculer, avec cinq chiffres exacts, la hauteur d'un segment à une base dont le volume est le quart de celui de la sphère.* (Juillet 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1-y^2}.$$

2° *Montrer que la courbe intégrale qui passe par le point* $x = 0, y = 1$ *peut être représentée par les équations*

$$x = \mathrm{L}\tang\frac{t}{2}, \qquad y = \sin t.$$

Construire cette courbe.

3° *Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des* x, *l'axe des* y *et la droite* $x = a$. *Limite de cette aire lorsque* a *croît indéfiniment.*

4° *Expression du rayon de courbure en un point de la courbe, en fonction du paramètre* t *correspondant à ce point.*

5° *En conclure les valeurs numériques des coordonnées des points d'inflexion de la courbe.*

6° *Volume du solide limité par la surface qu'engendre la courbe, en tournant autour de* Ox.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Évaluer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}.$$

2° *Montrer que l'équation*

$$e^{-x} - x = 0$$

n'a qu'une racine. Calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ *près.*

3° *Étant donnée la surface représentée par l'équation* $z = x^2 + y^2$, *on considère le solide compris entre la surface, le plan des* xy, *le cylindre* $y = x^2$ *et le plan* $y = 1$. *Volume de ce solide.* (Juillet 1906.)

Lille.

I. — ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, CALCUL DIFFERENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Étant donnée, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *la courbe* (Γ) *dont l'équation est*

$$x^2 y = 2a^3,$$

dans laquelle a *désigne une longueur donnée, construire cette courbe et déterminer les coordonnées des points* M_1 *et* M_2, *pieds des normales qui peuvent lui être menées de l'origine.*

2° *Calculer l'aire limitée par le segment* OM_1, *la courbe et l'axe* Ox.

3°
$$y = mx + p$$

étant l'équation d'une droite quelconque du plan, trouver la relation qui doit exister entre m *et* p *pour que cette droite soit tangente à la courbe* (Γ); *en déduire le lieu des points du plan d'où l'on peut mener à cette courbe deux tangentes rectangulaires et construire ce lieu.*

4° x *et* y *désignant les coordonnées d'un point de la courbe donnée, montrer que la sous-normale correspondante est égale à* $K\frac{y^2}{x}$, K *désignant un nombre constant; plus généralement, trouver toutes les courbes telles que la sous-normale soit égale à* $K\frac{y^{n+1}}{x^n}$, n *étant un nombre donné, montrer que pour certaines valeurs de* n *les courbes trouvées sont des ellipses ou des hyperboles dont les axes sont* Ox *et* Oy.

5° *Calculer le volume commun au cylindre engendré par la rotation de la droite* M_1M_2 *autour de* Ox *et à un prisme dont les arêtes sont perpendiculaires au plan* xOy *et dont la base est le triangle* OM_1M_2.

II. — MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Travail des forces appliquées à un solide indéformable.*

2° *Un cube homogène* $ABCDD_1A_1B_1C_1$, *pesant* 2^{kg}, *reçoit un mouvement hélicoïdal uniforme autour de l'axe* Oz *d'un trièdre trirectangle fixe* $Oxyz$, *son arête* AA_1 *glissant sur la verticale ascendante* Oz. *Aux sommets* B *et* D *de la base inférieure, voisins de* A, *sont appliquées deux forces constantes de* 4^{kg}, *constamment parallèles l'une à* Ox *l'autre à* Oy. *Au sommet* C *de la même face est attaché un fil élastique tendu relié à* O, *exerçant en* C *une traction proportionnelle à son allongement et évaluée à* 20^g *par centimètre d'allongement. Enfin le cube est soumis à un couple résistant d'axe* Oz, *valant* $0^{kgm},1$. *Calculer en kilogrammètres le travail des forces énumérées pour un déplacement d'un pas.*

L'arête du cube est de $0^m,10$. *Initialement* $OA = 0^m,10$; AB *est parallèle à* Ox; *la tension du fil est nulle. La vitesse de rotation par seconde est* 2π *dans le sens direct autour de* Oz, *et celle de translation de* $0^m,10$ *dans le sens* Oz. (Juillet 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère une surface sphérique homogène qui attire un point* M *de masse* 1 *proportionnellement à l'inverse du carré de la distance. En raison de l'homogénéité de la surface, la fonction des forces*

$$V(x, y\ z)$$

au point M *ne dépend que de la distance* ρ *du point* M *au centre de la sphère, que l'on prendra pour origine des coordonnées.*

On aura donc

$$V(x, y, z) = F(\rho). \tag{1}$$

1° *Partant de l'égalité* (1), *on exprimera les dérivées* *partielles* $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ *en fonction de* x, y, z, F, $\frac{\partial F}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$.

2° *Montrer que l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

à laquelle on sait que V *satisfait, se réduit ici à une équation différentielle linéaire entre* F *et* ρ. *Donner l'intégrale générale de cette équation.*

3° *Montrer que, si l'on connaît la valeur de* V, *d'une part au centre de la sphère, d'autre part à l'infini, on pourra déterminer les constantes arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale, et obtenir la valeur de* V *pour un point quelconque situé, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la sphère.*

4° *Achever le calcul en déterminant la valeur de* V *au centre de la sphère et à l'infini, à l'aide d'une intégrale double étendue à la surface de la sphère* (*suivant la définition de la fonction des forces*).

II. *Quelle est la limite de*

$$\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{\frac{1}{\sin(x^{-2})}+x}$$

quand x *tend vers l'infini par valeurs positives.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère une ellipse et une tangente fixe.*

Parallèlement à la tangente fixe TT′ *on mène dans l'ellipse une corde* AB ; *on projette les points* A *et* B *sur* TT′, *ce qui forme un rectangle.*

Comment faut-il choisir la distance des parallèles AB *et* TT′ *pour que ce rectangle ait une aire maximum.*

(Juillet 1906.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer les courbes planes dans lesquelles l'angle* α *que forme la tangente avec* Ox *est* *donné en fonction de l'abscisse par la formule*

$$\sin\alpha = \frac{2ax}{a^2+x^2}.$$

1° *Montrer que ces courbes peuvent se représenter par l'une ou l'autre des équations*

$$y = C \pm a\,L\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), \tag{1}$$

$$y = C \pm a\,L\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right). \tag{2}$$

2° *Étudier les deux courbes*

$$y = a\,L\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), \tag{1'}$$

$$y = a\,L\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right), \tag{2'}$$

et faire voir que toutes les autres courbes considérées (1) *et* (2) *s'en déduisent par translation ou par symétrie.*

(*On déterminera la forme de la courbe, le rayon de courbure en fonction de l'abscisse, les asymptotes et les points d'inflexion s'il en existe.*)

3° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (1) *et* (2).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les intégrales*

$$J_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x},$$

$$J_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx(1+\cos x)}{(1-\cos\alpha\sin x)^2}.$$

(Juillet 1906.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soient deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *En un point* M *quelconque de la courbe* E *on mène la tangente, qui coupe l'axe des* y *en* P, *et l'on élève* PA *perpendiculaire sur* PM.

1° *Calculer les coordonnées du point* M_1 *où la droite* PA *touche son enveloppe.*

2° *Déterminer la courbe* E *de façon que le segment* MM_1 *ait une longueur constante* $2a$. *Quelle courbe décrit alors le point* M_1 ?

3° *Déterminer la courbe* E *de façon que la droite* MM_1 *passe constamment par l'origine. Quelles sont les trajectoires orthogonales de la famille de courbes ainsi trouvées ?*

II. *Un point matériel* M *non pesant, de masse égale à l'unité, est attiré par un point fixe* O *proportionnellement à sa distance. Ce point est mobile sur une droite fixe* D *avec un frottement de coefficient* f. *Le point* M *est primitivement en un point* A *de la droite, sans vitesse initiale. On désigne par* ω *la projection du point fixe* O *sur la droite fixe* D, *et l'on pose* $\omega A = a$, $\omega O = h$.

1° *Le point* M *se mettra-t-il en mouvement ?*

2° *S'il y a mouvement, étudier ce mouvement, et déterminer le point de la droite où la vitesse du mobile s'annulera pour la première fois.*

3° *Que se passera-t-il après cet instant, et, en supposant que l'on ait* $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$ *et* $f = \frac{1}{9}$, *au bout de combien de temps le mobile s'arrêtera-t-il définitivement ?*

Épreuve pratique. — *Calculer une valeur approchée de l'intégrale*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2}\, dx$$

par la méthode de Simpson, en divisant le champ d'intégration en six parties égales (*on donne* $\log e = 0,43429$).

(Juillet 1906.)