NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 521-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__521_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1979.

(1903, p. 432.)

On considère une quadrique et un point O sur cette quadrique. Par O passe un plan variable. On prend le point de Frégier de la section relatif au point O. Lieu de ce point?

Ce lieu est en général une surface du quatrième ordre. Dans quel cas se réduit-elle à une surface du troisième ordre ou du deuxième ordre?

Quel est le lieu du même point en supposant que le plan variable soit astreint à passer par une droite fixe?

(E. Cahen.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Prenons pour axe des z la normale en O à la surface, pour axes des x et des y deux droites rectangulaires du plan tangent en O.

L'équation de la surface est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cz = 0,$$

ou

$$f(x, y, z) + 2Cz = 0,$$

en désignant par $f(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré.

Soit

$$ux + vy + wz = 0$$

un plan variable.

La normale en O à la section déterminée par ce plan a pour équations

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{-\dfrac{u^2+v^2}{w}}.$$

Un point M quelconque de cette normale a pour coordonnées

$$(1) \qquad x = \lambda u, \qquad y = \lambda v, \qquad z = -\lambda \frac{u^2 + v^2}{w},$$

où λ est un paramètre variable.

Ce point M sera le point de Frégier de la section relatif à O si l'on détermine λ de façon que le plan $ux + vy + wz = 0$ coupe suivant deux droites rectangulaires l'un des cônes de sommet O, passant par l'intersection de la quadrique et d'un plan quelconque p mené par M.

Si l'on prend pour P le plan $z = -\lambda \frac{u^2 + v^2}{w}$, le cône correspondant a pour équation

$$f(x, y, z) - 2Cw \frac{z^2}{\lambda(u^2 + v^2)} = 0.$$

Le plan $ux + vy + wz = 0$ le coupera suivant deux droites rectangulaires, si l'on a

$$\left[A + A' + A'' - 2 \frac{Cw}{\lambda(u^2 + v^2)}\right](u^2 + v^2 + w^2) - f(u, v, w) + \frac{2Cw^3}{\lambda(u^2 + v^2)} = 0$$

ou

$$(2) \qquad \lambda \Phi(u, v, w) - 2Cw = 0$$

en posant

$$\Phi(u, v, w) = (A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) - f(u, v, w).$$

Éliminant λ, u, v, w, entre les équations (1) et (2), on obtient comme équation du lieu

$$\Phi[xz, yz, -(x^2 + y^2)] + 2Cz(x^2 + y^2) = 0,$$

qui est une surface du quatrième degré en général.

Développant l'équation trouvée, elle s'écrit

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A + A')(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - z^2(Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy) \\ \quad + z(x^2 + y^2)(A''z + 2By + 2B'x) + 2Cz(x^2 + y^2) = 0. \end{array} \right.$$

Cette surface s'abaissera au troisième degré, si $z = 0$ est en facteur, ce qui exige que l'on ait

$$A + A' = 0.$$

Dans ce cas, le plan $z = 0$, occupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires; donc le point O est un point de l'intersection de la quadrique avec sa sphère de Monge.

Le lieu se réduira à une surface du deuxième degré, si $(x^2 + y^2)$ est en facteur, ce qui exige $A = A'$, $B'' = 0$, le point O est alors un ombilic de la quadrique.

Considérons maintenant le cas où le plan variable est astreint à passer par une droite fixe D, que nous pouvons supposer dans le plan des xz.

Les équations de cette droite seront

$$y = 0,$$
$$x - m\,z = 0,$$

et entre u, v, w on aura la relation $um + w = 0$ qui, avec les équations (1), donne

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - mxz = 0.$$

Le lieu cherché est l'intersection des deux surfaces (3) et (4).

En remplaçant dans (3) $(x^2 + y^2)$ par sa valeur tirée de l'équation (4), on voit sans difficulté que le lieu cherché est défini par les équations

$$x^2 + y^2 - mxz = 0,$$

$$xz^2 \{ [(A + A')m^2 + 2B'm + A' - A]x + 2(Bm - B'')y \\ + (A + A'')mz + 2Cm \} = 0.$$

Ce lieu se décompose en l'axe des z, les droites isotropes passant par l'origine dans le plan des xOy et enfin une conique intersection du cône

$$x^2 + y^2 - mxz = 0$$

et du plan

$$[(A + A')m^2 + 2B'm + A' - A)]x \\ + 2(Bm - B'')y + (A + A'')mz + 2Cm = 0.$$

C'est le lieu cherché.

1995.

(1904, p. 192.)

Étant donnés deux ternes de points ABC *et* A′B′C′, *si* D *est un point de la cubique gauche qui passe par ces six points, les quadriques, en nombre doublement infini, qui sont inscrites aux deux tétraèdres* DABC *et* D′A′B′C′ *passent par la droite d'intersection des plans* (ABC) *et* (A′B′C′) (*ce qui constitue d'ailleurs une condition simple*).

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit Δ la droite d'intersection des deux plans (ABC), (A′B′C′). Appelons α, β, γ les points d'intersection de la cubique gauche et d'un plan variable passant par Δ. Les plans $(D\alpha\beta)$, $(D\beta\gamma)$, $(D\gamma\alpha)$ enveloppent un cône G qui, on le voit immédiatement, est de la seconde classe et par conséquent du second ordre, puisque, par la droite $D\alpha$, par exemple, il ne passe que deux plans tangents à ce cône, le plan $(D\alpha\beta)$ et le plan $(D\alpha\gamma)$.

Le cône (G) est évidemment tangent aux plans (DAB), (DBC), (DCA), (DA′B′), (DB′C′), (DC′A′) et $(D\Delta)$. Donc toute quadrique tangente aux six premiers points est tangente au septième. Il en résulte bien que les quadriques dont il est question dans l'énoncé contiennent la droite Δ, puisque par cette droite on peut mener trois plans tangents à l'une quelconque d'entre elles, à savoir les plans (ABC), (A′B′C′) et $(D\Delta)$.

2004.

(1904, p. 528.)

Soit une ellipse de foyers F, F′. *En chaque point* M *de l'ellipse on prend sur la normale en* M *deux points* N *et* N′ *tels que*

$$MN = MN' = \sqrt{MF.MF'}.$$

On considère les cercles de centre N *et* N′ *et de rayons* NM *et* N′M. *Les tangentes communes à chacun de ces cercles et à l'ellipse rencontrent la tangente en* M *à l'ellipse en* *quatre points* P, Q, P′, Q′ *dont le lieu se compose d'une ellipse et d'une hyperbole.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ et soient $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ les coordonnées de M.

On sait que

$$MF.MF' = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$$

et, si l'on désigne par N le point obtenu en portant la longueur indiquée sur la normale vers la convexité de la courbe, par N′ l'autre point, on voit aisément que leurs coordonnées sont

$$x = (a+\varepsilon b)\cos\varphi,$$
$$y = \varepsilon(a+\varepsilon b)\sin\varphi,$$

avec $\varepsilon = +1$ pour le point N, $\varepsilon = -1$ pour le point N′.

O étant l'origine, les tangentes à l'ellipse, parallèles à ON, sont à une distance de O, et par suite de N, égale à

$$\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};$$

donc ce sont les tangentes communes à l'ellipse et au cercle (N); de même les tangentes communes à l'ellipse et au cercle (N′) seront parallèles à ON′.

Le lieu cherché est donc défini par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0, \\ x\sin\varphi - \varepsilon y\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = 0. \end{cases}$$

m et *m′* désignant les coefficients angulaires de ces deux droites, on a

$$(2)\qquad mm' = -\varepsilon\frac{b}{a},$$

indépendant de φ.

Si donc M_1 est le point de contact de l'ellipse et d'une tangente parallèle à ON, N_1 le point relatif à M_1, la droite ON_1

sera parallèle à la tangente en M et le cercle (N_1) sera tangent à cette dernière.

Posant $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = m$, les équations (1) s'écrivent

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} a^2(y^2 - b^2)m^2 + 2abxym + b^2(x^2 - a^2) = 0, \\ (x^2 - a^2)m^2 - 2\varepsilon xym + (y^2 - b^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

qui, d'après la remarque faite, ont, pour un point du lieu, deux racines communes, ce qui exige

$$\frac{a^2(y^2 - b^2)}{x^2 - a^2} = \frac{ab}{-\varepsilon} = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{y^2 - b^2},$$

d'où pour équation du lieu

$$\frac{x^2}{a(a + \varepsilon b)} + \varepsilon \frac{y^2}{b(a + \varepsilon b)} - 1 = 0,$$

ce qui représente une ellipse et une hyperbole, toutes deux circonscrites au rectangle construit sur les axes de l'ellipse donnée.

Remarque. — Ce calcul suppose que les deux tangentes, dont il a été question dans la remarque faite plus haut, ne sont pas confondues. La relation (2) montre que ce cas se présentera pour

$$m^2 = -\varepsilon \frac{b}{a};$$

soit $\varepsilon = -1$, on a $m = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ et les équations (3) donnent comme lieu singulier les quatre droites

$$\sqrt{a}\,y \pm \sqrt{b}\,x \pm \sqrt{ab(a+b)} = 0,$$

qui sont les droites, autres que les axes, obtenues en joignant deux à deux les quatre sommets de l'ellipse lieu; elles sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole et tangentes à l'ellipse donnée en des points A_1, A_2, A_3, A_4.

On voit aisément que, lorsque M se trouve en A_1, par exemple, le point N' est le centre de courbure de l'ellipse en A_1 et par suite le cercle (N') a, avec l'ellipse donnée, trois tangentes confondues avec la tangente en A_1. La normale en A_1 est à une distance de O égale à $(a-b)$; donc incidemment on voit que le cercle de centre O et de rayon $(a-b)$ est tangent en quatre points à la développée de l'ellipse.

Autre solution de M. PAINVIN.

2011.

(1905, p. 144.)

Sur la normale au point m d'une ellipse de centre o, et extérieurement à cette courbe, on porte le segment mp égal au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m.

Démontrer que les droites pm, po sont également inclinées sur les tangentes à l'ellipse issues de p.

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. KLUG.

Construisons le cercle qui passe au point p et dont le centre est le point de rencontre de la tangente en m à l'ellipse et du petit axe de cette courbe. Appelons respectivement q, r, f, g les points de rencontre de ce cercle avec les droites pm, op et avec le grand axe de l'ellipse.

Les deux axes sont, comme l'on sait, les bissectrices des angles $\widehat{poq}$, $\widehat{roq}$, et l'on a de plus, avec les notations habituelles,

$$op = a + b, \qquad oq = or = a - b,$$

d'où l'on tire

$$\overline{of}^2 = \overline{og}^2 = fo.og = op.ro = a^2 - b^2 = c^2.$$

Par suite les points f et g sont les foyers de l'ellipse. Les droites po, pm sont également inclinées sur les droites pf, pg et par suite sur les tangentes issues du point m à l'ellipse.

C. Q. F. D.

Autres solutions de MM. BARISIEN et H. LEZ.

2027.

(1905, p. 575.)

Le lieu du centre des ellipses surosculatrices en chaque point d'une ellipse donnée, et ayant une aire constante, est une ellipse. (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

L'ellipse donnée est la projection d'un cercle C, l'ellipse surosculatrice en un point M est la projection d'une ellipse E_1 surosculatrice au point du cercle dont la projection est M, ce point M_1 est un sommet de l'ellipse E_1, l'aire de l'ellipse E_1 est constante; donc cette ellipse est constante en grandeur et son centre décrit un cercle concentrique au cercle C; le lieu cherché est la projection de ce cercle, c'est-à-dire une ellipse homothétique et concentrique à l'ellipse donnée.