Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 90-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__90_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1652.

(1893, p. 2*.)

Trouver tous les systèmes de quatre nombres positifs a, b, c, d, tels que les dix nombres

$$a+b-1,\quad a+c-1,\quad a+d-1,$$
$$b+c-1,\quad b+d-1,\quad c+d-1,$$
$$2-b-c-d,\quad 2-c-d-a,$$
$$2-d-a-b,\quad 2-a-b-c$$

soient les inverses de nombres entiers.

(Levavasseur.)

SOLUTION

Par M. A. Deltour.

On se trouve en présence du système d'équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} a+b-1=x, & c+d-1=x_1, & 2-b-c-d=m, \\ a+c-1=y, & b+d-1=y_1, & 2-a-c-d=n, \\ a+d-1=z, & b+c-1=z_1, & 2-a-b-d=p, \\ & & 2-a-b-c=q, \end{array}\right.$$

dans lesquelles les seconds membres sont de la forme $\frac{1}{N}$, N étant entier.

Posant

$$(2)\qquad a+b+c+d-2=\alpha,$$

on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a=m+\alpha, & c=p+\alpha, \\ b=n+\alpha, & d=q+\alpha, \end{array}\right.$$

$$(4)\qquad m+n+p+q-2=-3\alpha.$$

L'élimination de a, b, c, d donne les six relations suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &x+p+q=x_1+m+n,\\ &=y+n+q=y_1+m+p,\\ &=z+n+p=z_1+m+q=1-\alpha.\end{aligned}\right.$$

On a encore les formules suivantes :

$$(6)\qquad x+x_1=y+y_1=z+z_1=\alpha$$

et

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &x+p=y+n=z_1+m=(1-\alpha)-q,\\ &x+q=y_1+m=z+n=(1-\alpha)-p,\\ &x_1+m=y+q=z+p=(1-\alpha)-n,\\ &x_1+n=y_1+p=z_1+q=(1-\alpha)-m.\end{aligned}\right.$$

Si dans (5) on remplace α par l'une des valeurs tirées de (6), on a six formules ne renfermant chacune que quatre inconnues de la forme $\frac{1}{N}$:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &2x+x_1+p+q=1,\\ &2x_1+x+m+n=1,\\ &2y+y_1+n+q=1,\\ &2y_1+y+m+p=1,\\ &2z+z_1+n+p=1.\\ &2z_1+z+m+q=1.\end{aligned}\right.$$

La combinaison de chaque ligne des relations (7) avec (4) donne encore quatre relations analogues :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &x+y+z_1+2q=1,\\ &x+y_1+z+2p=1,\\ &x_1+y+z+2n=1,\\ &x_1+y_1+z_1+2m=1.\end{aligned}\right.$$

On peut enfin remarquer que la somme des dix inconnues est égale à 2 :

$$\Sigma x+\Sigma m=2.$$

Les équations (8) forment ensemble le système des conditions à remplir.

Elles n'ont plus de solution lorsque chacune des inconnues est inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{5}$.

Il en résulte un moyen de résoudre le système en donnant successivement à chaque inconnue les dix valeurs positives ou négatives $\frac{1}{N}$ pour lesquelles $[N] \leqq 5$ et en recherchant dans chaque cas toutes les solutions possibles pour les autres inconnues.

Par raison de symétrie, il suffit d'opérer sur les deux inconnues m et x.

On peut rendre cette discussion plus facile en examinant séparément les cas suivants :

1° a, b, c, d ont des valeurs différentes;
2° Deux d'entre elles seulement sont égales : $a = b$;
3° $a = b$, $c = d$, a et c ayant des valeurs différentes;
4° $a = b = c \neq d$;
5° $a = b = c = d$.

1° *a, b, c, d ont des valeurs différentes.* — Il en est de même de m, n, p, q [formule (3)]. Dans le groupe des inconnues x, toutes les valeurs sont aussi différentes, mais il peut y avoir exception pour un seul des couples (x, x_1), (y, y_1) ou (z, z_1).

Cela résulte des formules (6) et (7).

2° $a = b$. — Comme conséquence des formules (3) et (7), on a

$$m = n, \qquad y = z_1, \qquad y_1 = z,$$

et les formules (8) se réduisent à

$$\begin{aligned} 2x + x_1 + p + q &= 1, \\ 2x_1 + x + 2m &= 1, \\ 2y + y_1 + m + q &= 1, \\ 2y_1 + y + m + p &= 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la symétrie n'est plus conservée et il ne suffit plus d'opérer sur les inconnues m et x. Mais la seconde des équations ne contient plus que trois inconnues et c'est celle qu'on doit chercher à résoudre par la méthode indiquée en rejetant les solutions incompatibles avec les trois autres équations.

3° $a = b,\ c = d$. — On a

$$m = n, \qquad p = q, \qquad y = y_1 = z = z_1;$$

les formules (8) deviennent

$$\begin{aligned} 2x + x_1 + 2p &= 1, \\ 2x_1 + x + 2m &= 1, \\ 3y + m + p &= 1. \end{aligned}$$

4° $a = b = c \neq d$. — On a

$$\begin{gathered} m = n = p \neq q, \\ x = y = z_1, \\ x_1 = y_1 = z; \end{gathered}$$

les formules (8) deviennent

$$\begin{aligned} 2x + x_1 + m + q &= 1, \\ 2x_1 + x + 2m &= 1. \end{aligned}$$

5° $a = b = c = d$. — On a

$$m = n = p = q, \qquad x = x_1 = y = y_1 = z = z_1.$$

Il ne reste qu'une seule condition à remplir :

$$3x + 2m = 1.$$

On obtient ainsi les solutions suivantes, D étant le dénominateur commun aux quatre fractions a, b, c, d dont les numérateurs figurent sous chacune de ces quatre lettres :

I.

D.	a.	b.	c.	d.
6	1	2	3	6

II.

D.	$a = b$.	c.	d.	D.	$a = b$.	c.	d.
4	1	2	4	12	7	4	9
4	4	1	2	12	9	4	7
6	6	1	2	12	5	8	10
6	6	2	3	12	8	5	10
6	6	1	3	12	7	6	9
6	2	5	7	12	7	6	8
8	5	2	7	12	8	6	7
10	6	3	9	15	9	7	11
12	9	2	7	18	10	7	17
12	7	4	11	20	15	6	9
12	9	4	5	24	15	10	17

III.

D.	$a = b$.	$c = d$.	D.	$a = b$.	$c = d$.
3	1	3	12	5	8
4	1	4	12	7	9
8	3	6	12	7	8

IV.

D.	$a = b = c$.	d.	D.	$a = b = c$.	d.
3	1	5	12	9	5
3	1	3	12	9	4
4	3	0	12	9	2
6	2	7	12	7	6
6	2	5	12	7	9
8	5	2	12	7	8
8	5	7	15	9	7
8	6	3	15	9	11
8	5	4	18	10	7
9	5	7	18	10	17
10	6	3	20	15	9
10	6	9	20	15	6
12	7	4	24	15	10
12	9	7	24	15	17
12	7	11			

V.

D.	$a = b = c = d.$	D.	$a = b = c = d.$
3	1	8	5
4	3	9	5
5	3	12	7

Il faut enfin ajouter une solution, dépendant d'un entier arbitraire :

D	$a = b = c.$	$d.$
k	k	1

(k entier positif quelconque).

Cette solution rentre, en général, dans le quatrième cas, et exceptionnellement dans le cinquième (pour $k = 1$).

Le problème proposé admet en tout

$$1 + 22 + 6 + 29 + 6 + 1 = 65 \text{ solutions.}$$

2022.

(1905, p. 480.)

Soient a, b, c trois coefficients consécutifs quelconques d'une équation algébrique à coefficients réels, dont toutes les racines sont réelles; on demande de démontrer qu'il est impossible d'avoir

$$b^2(2b^2 - 3ac)^2 < a^3(4c^3 - 3ab^2).$$

(Solon Chassiotis.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

Soit d le coefficient qui vient après c. On a, d'après un théorème de Catalan,

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) < 0 \tag{1}$$

ou, en ordonnant par rapport à d,

$$a^2d^2 + 2b(2b^2 - 3ac)d + a(4c^3 - 3ab^2) < 0. \tag{2}$$

Par hypothèse, les coefficients de l'équation proposée sont réels; le premier membre de l'inégalité (2) a donc des solutions réelles en d et jamais d'imaginaires, donc il est impossible que l'on ait

$$b^2(2b^2 - 3ac)^2 - a^3(4c^3 - 3ab^2) < 0$$

ou

$$b^2(2b^2 - 3ac)^2 < a^3(4c^3 - 3ab^2). \quad \text{C. Q. F. D.}$$