NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur le système articulé de Hart

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 19-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__19_1>

[R1e]

SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DE HART;

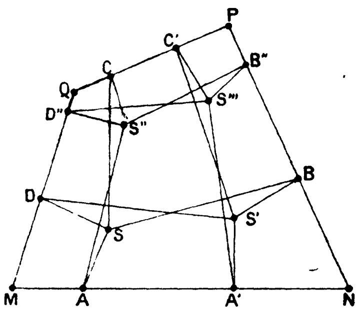
PAR M. G. FONTENÉ.

Mon but est simplement de faire connaître aux lecteurs de ce Journal une propriété curieuse signalée en

face variable S et qui ont pour sommets les points doubles de cette surface.

1893 par le D[r] Burmester (*Zeitschrift für Mathematik und Physik...*).

1. Le système articulé de Hart, généralisé par Kempe, se compose d'un quadrilatère articulé MNPQ et de quatre tiges SA, SB, SC, SD articulées avec les



côtés de ce quadrilatère. Les divisions de points MAN et QCP doivent être semblables, ainsi que les divisions de points MDQ et NBP; les quatre points A, B, C, D doivent être à un cercle. Si l'on désigne par a, b, c, d les quatre côtés du quadrilatère, et si l'on pose

$$QC = c.g, \qquad QD = d.h,$$

d'où

$$MA = a.g, \qquad PB = b.h,$$

cette dernière condition se traduit par la relation *doublement quadratique*

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g},$$

dont j'ai fait usage précédemment (*Nouvelles Annales*, 1904, p. 25).

Si l'on regarde g et h comme les coordonnées cartésiennes d'un point, la courbe représentée par l'équation précédente est une cubique circonscrite au quadrilatère complet dont les côtés sont représentés par les équations

$$g = 0, \qquad g = 1, \qquad h = 0, \qquad h = 1;$$

deux sommets opposés de ce quadrilatère complet sont à l'infini sur les axes. D'après la théorie des points correspondants sur une cubique, on peut donc inscrire à la cubique considérée une infinité de quadrilatères complets ayant deux sommets à l'infini sur les axes ; en d'autres termes, si g et h sont les coordonnées d'un point de la courbe, donnant lieu aux points de coordonnées g', h et g, h'', le point de coordonnées g', h'' est aussi sur la courbe. Dès lors, en partant de l'appareil simple MNPQ, SA, SB, SC, SD, conservons les points B et D et remplaçons les points A et C par les points A′ et C′, ce qui remplace S par S′, le quadrilatère SBS′D étant un contre-parallélogramme (Hart, Kempe, *Nouvelles Annales,* 1904, p. 25); conservons de même les points A et C, et remplaçons B et D par B″ et D″, avec S″ au lieu de S; *nous pourrons encore prendre comme points d'articulation les deux couples de points* A′, C′ *et* B″, D″, *en remplaçant* S *par* S‴. On a ce tableau :

	AB	A′C′
BD	S	S′
B″D″	S″	S‴

2. Un point tel que S est foyer d'une conique inscrite au quadrilatère MNPQ. On sait que le lieu de ces foyers est une cubique bicirculaire, dont les tangentes aux points cycliques I et J se coupent en un point S_0 de la courbe, foyer de la parabole inscrite; une telle cubique bicirculaire est appelée *focale*. Les deux foyers d'une même conique sont, sur la courbe, des points *correspondants,* au sens de ce mot rappelé ci-dessus, et la correspondance en question est, parmi les trois correspondances existantes, celle qui associe les points cycliques; les points M et P sont des points correspondants, de même les points N et Q, et aussi les points X et Y, en appelant ainsi les points de croisement des droites MN et PQ, MQ et NP.

Or, d'après le Dr Burmester, la droite SS' passe en X, la droite SS'' en Y. Il en résulte d'abord que les droites XS'' et YS' se coupent en un point S''' de la courbe. En outre, S' et S'', par exemple, sont les deux foyers d'une même conique inscrite au quadrilatère.

3. En particulier (*voir* la figure dans les *Nouvelles Annales, loc. cit.*, p. 22) *si* S *est le foyer* S_0 *de la parabole inscrite,* les contre-parallélogrammes $SBS'D$ et $SCS''A$ fournissent les points S' et S'', dont chacun donne lieu au guidage rectiligne d'un point (appareil de Hart), et S''' est à l'infini. On a ici, en partant de S,

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = 0, \qquad \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g} = 0,$$

$$g' = \infty, \qquad h'' = \infty.$$