NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. MICHEL

Sur une classe de quartiques gauches unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 289-296

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__289_0>

[M³6a]

SUR UNE CLASSE DE QUARTIQUES GAUCHES UNICURSALES;

PAR M. CH. MICHEL,
Docteur ès sciences.

1. Dans une Communication à l'Académie des Sciences (18 décembre 1876), M. Appell a signalé le premier l'existence et donné les propriétés les plus importantes des quartiques gauches unicursales dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire. Je me propose d'établir quelques propriétés nouvelles de ces courbes.

Soit une telle courbe C. M. Appell a montré qu'il existe un tétraèdre de référence tel que l'on puisse poser

$$x = \lambda^4, \qquad y = \lambda^3, \qquad z = \lambda, \qquad t = 1,$$

x, y, z, t étant les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque M de C et λ étant un paramètre arbitraire. Voici comment est défini ce tétraèdre. Deux de ses sommets sont les points I et J de la courbe C, de paramètres o et ∞, en chacun desquels le plan osculateur rencontre C en quatre points confondus. Les équations de l'arête IJ sont

$$y = 0, \qquad z = 0.$$

Les deux autres sommets sont les points d'intersection A de la tangente en I à C avec le plan osculateur en J à C et B de la tangente en J à C avec le plan osculateur en I à C. Les équations de l'arête AB sont

$$x = 0, \qquad t = 0.$$

2. Les résultats que j'ai en vue d'établir sont relatifs à deux quadriques liées à la courbe C.

L'une est la quadrique S qui passe par la courbe C et a pour équation tétraédrique

$$xt = yz.$$

L'autre est la quadrique Σ qui est tangente à tous les plans osculateurs à la courbe C, autrement dit, qui est inscrite dans la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe C. Les coordonnées tangentielles tétraédriques u, v, w, s du plan osculateur à la courbe C au point M de paramètre λ étant

$$u = 1, \qquad v = -2\lambda, \qquad w = 2\lambda^3, \qquad s = -\lambda^4,$$

la quadrique Σ a pour équation tangentielle tétraédrique

$$vw = 4us.$$

Chacune des deux quadriques S et Σ passe par les arêtes du tétraèdre de référence autres que les arêtes opposées AB et IJ, qui sont conjuguées par rapport à chacune de ces quadriques.

3. Théorème I. — *Par une droite* D *qui rencontre à la fois la courbe* C *et la droite* IJ, *on peut mener quatre plans tangents à la courbe, en dehors du plan qui passe par* D *et par la tangente à* C *au point de rencontre de* C *et de* D. *Les points de contact sont dans un même plan* Π *qui passe par le point de rencontre de* D *avec* IJ.

Désignons, en effet, par M_0, de paramètre λ_0, le point de rencontre de D avec C et par P le point de rencontre de D avec IJ. Définissons le point P comme étant le point d'intersection de IJ avec le plan qui passe par AB et qui a pour équation

$$x + \rho t = 0.$$

Un plan quelconque passant par P a pour équation

$$x + \alpha y + \beta z + \rho t = 0,$$

α et β étant des paramètres variables. L'équation aux λ des points d'intersection de ce plan avec la courbe C est

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda + \rho = 0;$$

quels que soient α et β, la somme des produits deux à deux des racines de cette équation est nulle, et le produit des racines est égal à ρ.

Supposons alors que le plan passe par M_0 et qu'il soit tangent à C en un point M de paramètre λ. Il rencontre la courbe en un quatrième point M′ de paramètre λ'. On a les deux relations

$$\lambda^2 + \lambda_0\lambda' - 2\lambda(\lambda_0 + \lambda') = 0,$$
$$\lambda^2\lambda_0\lambda' = \rho.$$

Éliminons λ'; il vient

$$\lambda_0\lambda^4 + 2\lambda_0^2\lambda^3 + 2\rho\lambda - \rho\lambda_0 = 0,$$

équation du quatrième degré en λ, qui a pour racines les paramètres des points de contact de quatre plans tangents menés à la courbe C par la droite D. Cette équation est aussi l'équation aux λ des points d'intersection de la courbe C avec le plan Π qui a pour équation

$$\lambda_0 x + 2\lambda_0^2 y + 2\rho z + \rho\lambda_0 t = 0.$$

Ce plan passe par le point P,

THÉORÈME II. — *Quand la droite varie d'une manière quelconque, le plan* Π *enveloppe la quadrique* Σ.

En effet, si u, v, w, s sont les coordonnées tangentielles du plan Π, on a

$$u = \lambda_0, \qquad v = 2\lambda_0^2, \qquad w = 2\rho, \qquad s = \rho\lambda_0$$

et, quels que soient λ_0 et ρ, on a, entre u, v, w, s, la relation

$$vw = 4\,us,$$

équation tangentielle de la quadrique Σ.

THÉORÈME III. — *Quand la droite* D *varie de manière que son point de rencontre avec la courbe* C *reste fixe, le plan* Π *tourne autour d'une génératrice rectiligne de la quadrique* Σ, *qui n'est pas du même système que les tangentes en* I *et* J *à la courbe* C.

En effet, supposons λ_0 fixe dans l'équation générale du plan Π. Cette équation dépend alors linéairement du paramètre ρ; le plan passe ainsi par une droite fixe qui a pour équations

$$x + 2\lambda_0 y = 0, \qquad 2z + \lambda_0 t = 0.$$

Cette droite est une génératrice rectiligne de la quadrique Σ. Elle rencontre les tangentes en I et J à la courbe C, qui ont pour équations : la première, $x = 0$, $y = 0$, la seconde, $z = 0$, $t = 0$. Elle n'est donc pas du système de génératrices rectilignes qui contient les tangentes en I et J à la courbe C.

THÉORÈME IV. — *Quand les points de rencontre de la droite* D *avec* IJ *et avec* C *se correspondent* *homographiquement, de façon que, lorsque l'un vient en* I *ou en* J, *l'autre vienne aussi en* I *ou en* J, *le plan* Π *tourne autour d'une génératrice rectiligne de la quadrique* Σ *qui est du même système que les tangentes à la courbe* C *en* I *et* J.

La correspondance homographique énoncée se traduit, en effet, par la relation

$$\rho = a\lambda_0,$$

a étant une quantité constante. L'équation du plan Π s'écrit alors

$$x + 2\lambda_0 y + 2az + a\lambda_0 t = 0.$$

Elle dépend linéairement du paramètre λ_0. Le plan Π passe donc par une droite fixe qui a pour équations

$$x + 2az = 0, \qquad 2y + at = 0.$$

Cette droite est une génératrice rectiligne de la quadrique Σ qui ne rencontre ni la tangente en I ni la tangente en J à la courbe C. Elle est du même système que ces deux droites.

4. Par dualité, on a, relativement à la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe C, les théorèmes suivants qu'il suffit d'énoncer :

Théorème V. — *Une droite* Δ *qui touche la développable et qui rencontre la droite* AB *rencontre la développable en quatre points autres que le point de contact. Les plans tangents à la développable en ces quatre points passent par un même point* μ *qui est situé dans le plan qui contient* AB *et* Δ.

Théorème VI. — *Quand la droite* Δ *varie d'une manière quelconque, le lieu du point* μ *est la quadrique* S.

Théorème VII. — *Quand la droite* Δ *se déplace dans un plan tangent fixe à la développable, le point* μ *décrit une génératrice rectiligne de la quadrique* S, *qui n'est pas du même système que les tangentes en* I *et* J *à la courbe* C.

Théorème VIII. — *Quand le plan osculateur qui contient* Δ *et le plan qui passe par* AB *et* Δ *se correspondent homographiquement de façon que, lorsque l'un vient à coïncider avec le plan osculateur en* I *ou en* J, *l'autre vienne aussi à coïncider avec le plan osculateur en* I *ou en* J, *le point* μ *décrit une génératrice rectiligne de la quadrique* S, *qui est du même système que les tangentes à la courbe* C *en* I *et* J.

5. Des résultats précédents on peut déduire des théorèmes démontrés par Laguerre (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878) sur les quartiques planes à trois points doubles d'inflexion et sur les courbes planes de quatrième classe à trois tangentes doubles de rebroussement. Voici en vertu de quelles considérations :

1° Un plan passant par la droite IJ rencontre la courbe C en deux points variables dont les paramètres sont égaux et de signes contraires. En effet, un tel plan a une équation de la forme

$$y - kz = 0$$

et l'équation aux λ des points d'intersection de ce plan avec la courbe est

$$\lambda^3 - k\lambda = 0,$$

qui, débarrassée de ses racines fixes o et ∞, se réduit à

$$\lambda^2 - k = 0,$$

équation dont les racines sont égales et de signes contraires. Il est immédiat, par identification, que, inversement, si deux points ont des paramètres égaux et de signes contraires, la droite qui les joint rencontre IJ.

2° Par un point P de la droite IJ on peut mener quatre plans osculateurs à la courbe C, et les points de contact sont répartis deux à deux sur deux droites issues de P. En effet, le plan osculateur au point M, de paramètre λ, a pour équation

$$x - 2\lambda y + 2\lambda^3 z - \lambda^4 t = 0.$$

Écrivons qu'il passe par le point P défini par l'intersection de la droite IJ avec le plan mené par AB ayant pour équation $x + \rho t = 0$. On trouve ainsi la condition

$$\lambda^4 = - \rho,$$

équation du quatrième degré dont les racines sont deux à deux égales et de signes contraires. D'où le théorème.

Cela posé, projetons coniquement du point P situé sur IJ la courbe C sur un plan. La projection est une courbe du quatrième degré c qui admet pour points doubles d'inflexion la trace de la droite IJ et les traces des deux droites issues de P qui contiennent les points de contact des plans osculateurs à la courbe C qui passent par P. Les tangentes aux points doubles sont les traces des quatre plans osculateurs menés de P à la courbe C et les projections des tangentes en I et J à la courbe C. Du théorème I on déduit alors le théorème suivant :

Étant donnée une courbe plane c du quatrième degré à trois points doubles d'inflexion, d'un point m_0 de cette courbe on peut mener quatre tangentes à la courbe, autres que la tangente en m_0; les points de contact sont sur une droite π.

Cette droite π est la trace du plan Π défini précédemment. Quand, P restant fixe, M_0 se déplace sur la courbe C, le plan Π enveloppe le cône circonscrit à la quadrique Σ, de sommet P. Ce cône est tangent aux deux plans qui passent par P et par les tangentes en I et J à la courbe et aux plans osculateurs à la courbe C issus de P. En projetant on a, relativement à la courbe C, le théorème suivant :

Quand le point m_0 se déplace sur la quartique c, la droite π enveloppe une conique qui est tangente aux six tangentes aux points doubles de la quartique c.

Par dualité, on a les résultats suivants, relatifs à la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe C :

Une section de cette développable par un plan quelconque passant par AB *est une courbe de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles de rebroussement.*

Étant donnée une courbe de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles de rebroussement, une tangente quelconque à cette courbe la rencontre en quatre points autres que le point de contact. Les tangentes en ces quatre points sont concourantes en un point dont le lieu est la conique qui passe par les six points de rebroussement de la courbe.