NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1907 (mathématiques élémentaires)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 342-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__342_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1907 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES).

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I. *Étant donné un triangle* ABC, *trouver sur la droite* BC *un point* D *tel qu'un cercle* (β), *inscrit ou exinscrit au triangle* ABD *et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle* B *du triangle donné, soit tangent à un cercle* (γ), *inscrit ou exinscrit au triangle* ACD *et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle* C *du triangle donné. Même question en considérant les angles extérieurs en* B *et* C, *ou encore un angle intérieur et un angle extérieur.*

II. *On donne deux cercles* (β) *et* (γ) *tangents* extérieurement *et soient* SX, SX' *les tangentes communes extérieures à ces cercles. Un point* A *décrit la tangente commune intérieure* ZZ' *et l'on mène de ce point les secondes tangentes aux cercles* (β), (γ), *lesquelles rencontrent* SX *en* B *et* C, SX' *en* B', C' :

1° *Les centres des deux cercles étant* β *et* γ, *le point d'intersection* M *des droites* Bβ *et* Cγ *et le point d'intersection* M' *des droites* B'β *et* C'γ *décrivent deux droites* Δ, Δ'.

2° *Le quadrilatère* MβM'γ *est inscriptible à un cercle et les deux droites* MM' *et* $\beta\gamma$ *sont conjuguées par rapport à ce cercle.*

3° *L'enveloppe de* MM' *est une hyperbole; trouver le point de contact de* MM' *avec son enveloppe*.

4° *Le cercle* $A\beta\gamma$ *est orthogonal au cercle* $M\beta M'\gamma$. *Ce même cercle* $A\beta\gamma$, *le cercle de centre* M *tangent aux trois côtés du triangle* ABC *et le cercle de centre* M' *tangent aux trois côtés du triangle* AB'C' *ont, deux à deux, même axe radical.*

5° *Désignons par* O *le milieu de* $\beta\gamma$, *par* D *et* D' *les points où* ZZ' *rencontre* SX *et* SX' *et par* ω *le centre du cercle* $A\beta\gamma$.

On a

$$\frac{OM}{DO} = \frac{D'O}{OM'} = \frac{AD'}{AD},$$

$$\frac{1}{\omega O} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AD'}.$$

I. (Le lecteur est prié de faire les figures pour cette première partie.)

Les deux cercles (β) et (γ) doivent être tangents extérieurement, mais trois hypothèses sont possibles :

1. La tangente commune intérieure peut être la droite AD, les deux cercles touchant cette droite au même point, et c'est ce cas que l'on devait surtout considérer en vue de la seconde partie du problème. *Le point* D *est alors le point de contact avec* BC *du cercle qui touche les trois droites indéfinies* BC, AB, AC, *et qui a son centre au point de rencontre des bissectrices considérées; ces bissectrices étant données, il y a donc un seul point* D, *mais ce point correspond à deux solutions différentes.*

Avec les bissectrices des angles intérieurs, le point D étant entre B et C, les cercles (β) et (γ) peuvent être inscrits aux triangles ADB et ADC, ou être exinscrits dans les angles B et C respectivement; on a, dans les deux cas,

$$DB - DC = AB - AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle inscrit au triangle ABC.

Avec les bissectrices des angles extérieurs, le point D étant entre B et C, les cercles (β) et (γ) peuvent être exinscrits aux triangles ADB et ADC dans les angles qui ont leurs sommets en A, ou dans ceux qui ont leurs sommets en D; on a alors

$$DC - DB = AB - AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle A.

Avec la bissectrice de l'angle intérieur en B et celle de l'angle extérieur en C, le point D étant sur le prolongement de BC au delà de C, le cercle (β) peut être inscrit au triangle ABD en même temps que le cercle (γ) est exinscrit au triangle ACD dans l'angle ACD, ou encore le cercle (β) peut être exinscrit au triangle ABD dans l'angle B en même temps que le cercle (γ) est inscrit au triangle ACD; on a alors

$$DB + DC = AB + AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle B.

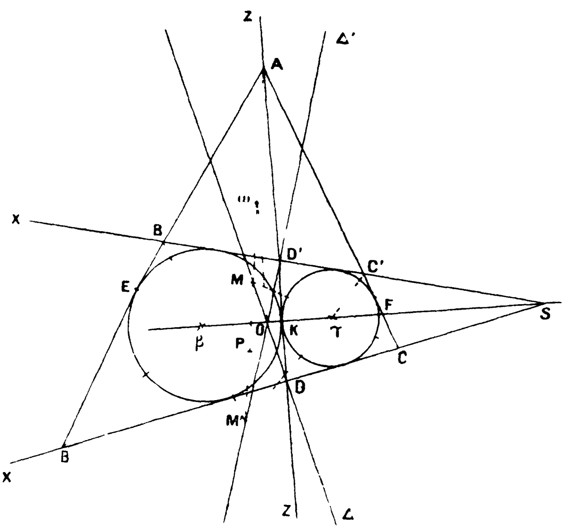
2. La tangente commune intérieure peut être la droite BC, les deux cercles touchent cette droite au même point. Si l'on considère, par exemple, les bissectrices des angles extérieurs en B et C, on trouve $AD = p$, ce qui donne deux solutions; etc.

3. Chacune des droites AD et BC peut être une tangente commune extérieure. Soient E et F les points de contact des cercles (β) et (γ) avec la droite BC, et po-

sons $\overline{BE} = x$, $\overline{CF} = y$, le sens positif pour $\overline{BE}$ étant le sens BC, le sens positif pour $\overline{CF}$ étant le sens CB.

Si les centres β et γ doivent être sur les bissectrices des angles intérieurs en B et C, on a d'abord (sans tenir compte du contact)

$$x + y = p;$$



le contact donne, en observant que $FE = p - a$ (dans le sens BC),

$$xy = \frac{p(p-a)}{4};$$

l'équation

$$X^2 - pX + \frac{p(p-a)}{4} = 0$$

ayant des racines, on a ainsi deux solutions. La distance du milieu du côté BC au milieu du segment FE, dont le sens et la longueur sont connus, est $\frac{1}{2}\sqrt{ap}$.

Les angles extérieurs en B et C ne donnent pas de solution ; l'équation

$$X^2 - (p-a)X + \frac{(p-a)p}{4} = 0$$

n'a pas de racines.

Si l'on considère l'angle intérieur en B et l'angle extérieur en C, on a, avec $EF = p - c$ dans le sens BC,

$$x + y = p - b, \qquad xy = -\frac{(p-b)(p-c)}{4};$$

la distance du milieu du côté BC au milieu du segment EF est $\frac{1}{2}\sqrt{a(p-b)}$.

Avec l'angle intérieur en C et l'angle extérieur en B, on a $FE = p - b$ dans le sens CB, et la distance du milieu du côté CB au milieu du segment FE est

$$\frac{1}{2}\sqrt{a(p-c)}.$$

II. (Le lecteur est prié de compléter la figure.)

1. Soient D et D' les points où la droite ZZ' rencontre les droites SX et SX'. En appliquant au triangle ABC le résultat obtenu dans la première partie, avec la première hypothèse, on voit que D est le point de contact avec BC du cercle qui a pour centre le point M et qui est tangent aux trois droites BC, AB, AC; le lieu du point M est donc la perpendiculaire Δ menée en D à la droite SX. Le lieu du point M' est de même la perpendiculaire Δ' menée en D' à la droite SX'. Les deux droites Δ et Δ' passent au milieu O du segment $\beta\gamma$.

2. Les côtés du quadrilatère $M\beta M'\gamma$ sont les bissectrices des angles du quadrilatère BB'C'C; ce quadrila-

tère $M\beta M'\gamma$ est donc inscriptible à un cercle. On a, d'ailleurs,

$$\widehat{M} = 1^d + \frac{A}{2}, \qquad \widehat{M'} = 1^d - \frac{A}{2},$$

$$\widehat{\beta} = 1^d + \frac{S}{2}, \qquad \widehat{\gamma} = 1^d - \frac{S}{2}.$$

La droite MM' est la bissectrice de l'angle A.

2 *bis*. La perpendiculaire menée en O à la droite $\beta\gamma$ passe au centre du cercle $M\beta M'\gamma$. Si ω est le point où la droite MM' rencontre cette perpendiculaire, comme les droites $O\beta$ et $O\omega$ sont les bissectrices des angles que forment les droites Δ et Δ', le conjugué du point ω par rapport à M et M' est sur $\beta\gamma$, et la droite $\beta\gamma$ est la polaire du point ω par rapport au cercle considéré. Les droites MM' et $\beta\gamma$ sont donc conjuguées par rapport à ce cercle.

3. Le segment MM', compris entre les droites fixes Δ et Δ', étant vu sous un angle constant de chacun des points β et γ, l'enveloppe de la droite MM' est une conique de foyers β et γ, tangente à ces deux droites. Les valeurs des angles β et γ montrent que cette conique a pour asymptotes les droites Δ et Δ'; elle a un sommet au point K. On peut encore démontrer que le produit des distances des points β et γ à la droite MM' est constant.

Le point de contact de la droite MM' avec son enveloppe est le milieu P du segment MM'. En effet, les droites MM' et $\beta\gamma$ étant conjuguées par rapport au cercle $M\beta M'\gamma$, la droite $\beta\gamma$ passe au pôle de MM', et le milieu P de la corde MM' est un point tel que, si on le joint aux points β et γ, la droite PM est bissectrice de l'angle $\beta P\gamma$ (réciproque du fait considéré plus haut).

Si l'on n'avait pas tenu à n'utiliser que les propriétés focales de l'hyperbole, on aurait pu faire voir que l'aire du triangle MOM′ est constante en démontrant que le produit OM.OM′ est constant (*voir* n° 5). Dans le même ordre d'idées, le fait que P est milieu de MM′ est immédiat.

4. Les valeurs des angles $\beta M \gamma$ et $\beta A \gamma$ étant $\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ et $\frac{A}{2}$, les deux cercles $\beta M \gamma$ et $\beta A \gamma$ ont leurs tangentes en β ou en γ rectangulaires; le cercle $A\beta\gamma$ est donc orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$. Le centre du cercle $A\beta\gamma$ est dès lors le point ω.

Autrement : la droite $A\omega$ étant bissectrice de l'angle BAC, en même temps que les droites $A\beta$ et $A\gamma$ sont bissectrices des angles KAB et KAC, si l'on désigne par $2x$ et $2y$ les angles KAB et KAC, on a

$$BA\omega = x + y, \qquad \text{ou} \qquad \beta A\omega = y = \gamma AK,$$

de sorte que $A\omega$ et AK sont également inclinées sur $A\beta$ et $A\gamma$. Le point ω étant d'ailleurs sur la perpendiculaire menée à la droite $\beta\gamma$ en son milieu O, ce point est le centre du cercle $A\beta\gamma$. Donc ....

Un même cercle $M\beta M'\gamma$ donne deux positions du point A sur la droite ZZ′, avec un même cercle $A\beta\gamma$.

4 *bis*. Le cercle $A\beta\gamma$ étant orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$, si AA_1 est le diamètre de ce cercle issu de A, les points A et A_1 sont conjugués par rapport à M et M′; comme A est un centre de similitude des deux cercles (M) et (M′), A_1 est le second centre de similitude, et le cercle $A\beta\gamma$, de diamètre AA_1, est coradical à ces deux cercles. On peut remarquer que les droites βA et γA sont bissectrices des angles $M\beta B'$ et $M\gamma C'$.

Autrement : le centre $A\beta\gamma$ et les cercles (M) et (M′), qui ont leurs centres en ligne droite, auront deux à deux même axe radical s'il existe à distance finie un point ayant même puissance par rapport à chacun d'eux ; or, les puissances du point S par rapport à ces cercles sont $\overline{SD}^2$, $\overline{SD'}^2$, $\overline{S\beta}\times\overline{S\gamma}$, et l'on a

$$\overline{SD}^2 = \overline{S\beta}\times\overline{S\gamma}$$

dans le cercle de centre O et de rayon

$$OD = O\beta = O\gamma.$$

L'axe radical commun se confond avec la droite SEF, en appelant E et F les points de contact des droites AB et AC avec les cercles (β) et (γ). Les droites $P\beta$ et $P\gamma$ passent en effet aux points E et F respectivement, comme on peut le voir au moyen des égalités d'angles

$$\widehat{MP\beta} = \widehat{MP\gamma} = \widehat{M'};$$

comme P est milieu de MM′, E est milieu du segment compris entre les points de contact des cercles (M) et (M′) avec AB ou AC.

5. La similitude des triangles $MO\beta$ et $\beta OM'$ donne

$$\frac{OM}{O\beta} = \frac{O\beta}{OM'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{OM}{OD} = \frac{OD'}{OM'},$$

de sorte que MD′ et M′D sont parallèles. On a donc

$$(1) \qquad \frac{OM}{DO} = \frac{D'O}{OM'} = \frac{MD'}{M'D} = \frac{AD'}{AD}.$$

On a encore

$$\frac{AD}{\omega O} = \frac{DM}{OM} = 1 + \frac{DO}{OM} = 1 + \frac{AD}{AD'},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{1}{\omega O} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AD'}.$$

Autrement : si H est l'orthocentre du triangle $A\beta\gamma$, on a $AH = 2\omega O$, et H doit être conjugué de A par rapport à D et D'; or on a

$$KA.KH = K\beta.K\gamma = \overline{KD'}^2.$$