NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1907. Première composition de mathématiques (Sciences I et II)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 350-373

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__350_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1907.

Première composition de Mathématiques (Sciences I et II).

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. *Étudier la variation de la fonction*

$$y = e^{-x} \sin x.$$

Représenter cette variation par une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox *et* Oy. *Déterminer les points d'inflexion de la courbe.*

Calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^{k\pi} e^{-x} \sin x \, dx,$$

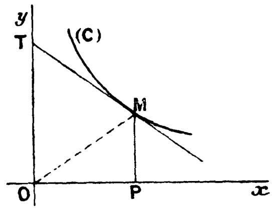
où k *désigne un entier positif* $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *et indiquer la signification géométrique de cette intégrale.*

Déterminer la limite de I_k *pour* $k = +\infty$.

II. 1° *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *on demande de trouver une courbe* (C) *possé-*

dant la propriéte suivante. Si, en un point quelconque M *de cette courbe, on mène la tangente* MT *qui rencontre* Oy *en* T, *et si l'on abaisse du point* M *la perpendiculaire* MP *sur* Ox, *l'aire du trapèze* OTMP *est équivalente à un carré donné de côté* a (*fig.* 1).

Fig. 1.



On établira l'équation de la courbe en supposant que l'arc de courbe considéré ait, par rapport aux axes, la disposition indiquée sur la figure; on tracera la courbe dont on aura obtenu ainsi l'équation et l'on énoncera la propriété géométrique qui remplace celle de l'énoncé pour les arcs qui présentent une disposition différente de celle de la figure.

2° *Parmi les courbes trouvées on construira en particulier celle qui passe par le point* $x = a$, $y = a$, *et l'on calculera les rayons de courbure de cette courbe aux points d'abscisses* $x = \pm a$.

III. *Un fil élastique, de masse négligeable, est attaché à un point fixe* A; *quand ce fil pend librement sous l'action de la pesanteur, sans être tiré, il a une longueur* AB $= l$ *et une tension nulle. Quand le fil est tiré, à son extrémité libre, de façon à prendre une longueur* AM $= r$, *plus grande que* l, *la tension* F *du fil est une force, dirigée de* M *vers* A, *ayant une intensité proportionnelle à l'al-*

longement

$$F = k(r - l),$$

où k est une constante positive.

1° *Ceci posé, on attache au bout du fil un point pesant; déterminer la masse m de ce point, de façon*

Fig. 2.

qu'il soit en équilibre sous l'action de son poids et de la tension du fil, dans la position O *telle que* $AO = 2l$.

2° *On tire sur le fil portant à son extrémité ce point matériel m et l'on amène le point dans une position* M_0 *telle que* $AM_0 = r_0$ *ait une longueur supérieure à* $2l$, *puis on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Étudier le mouvement du point matériel m.*

Quelle doit être la valeur de r_0 *pour que le point m remonte jusqu'au point* B, *où la tension s'annule, et arrive au point* B *avec une vitesse nulle?*

Quelle doit être la valeur de r_0 *pour que le point m* *remonte jusqu'en* A *et arrive en* A *avec une vitesse nulle?*

I. La dérivée de la fonction est

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(\cos x - \sin x).$$

Elle s'annule pour les valeurs de x pour lesquelles

$$\tang x = 1,$$

soit

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

La fonction passe donc alternativement par les maxima et minima pour les valeurs

$$x = \frac{\pi}{4} - 2\pi, \qquad x = \frac{\pi}{4} - \pi, \qquad x = \frac{\pi}{4},$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi, \qquad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi, \qquad \ldots,$$

qui vont en décroissant en valeur absolue et sont alternativement positives et négatives :

$$e^{\frac{7\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -e^{-\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{\frac{-9\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \ldots.$$

La courbe représentative coupe d'ailleurs l'axe Ox aux points d'abscisses $k\pi$, elle a donc la forme de la figure 3, d'une sinusoïde déformée dont les sinuosités infiniment grandes à gauche, du côté des x négatifs, décroissent pour devenir infiniment petites du côté des x positifs, de telle sorte que la courbe devient asymptote à Ox du côté positif en serpentant.

La dérivée seconde est

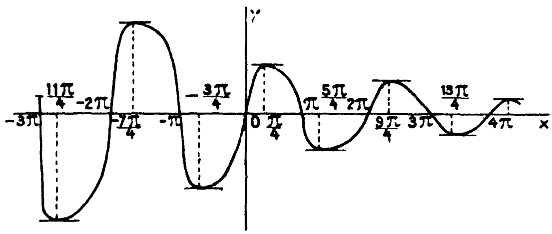
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2e^{-x}\cos x.$$

Les points d'inflexion sont donc les points d'abscisses

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

On obtient, par deux intégrations par parties, l'in-

Fig. 3.



tégrale indéfinie

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x),$$

ce qui donne

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\pi}, \qquad I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi},$$

$$I_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-3\pi}, \qquad \ldots;$$

en général

$$I_k = \frac{1}{2}[1-(-1)^k e^{-k\pi}].$$

Lorsque k croît indéfiniment par valeurs entières positives, la limite de I_k est manifestement $\frac{1}{2}$. C'est la somme d'une série alternée convergente dont les termes sont les aires des boucles successives de la courbe.

II. L'équation de la tangente MT est, en désignant par x, y les coordonnées du point M et par X, Y les coordonnées courantes,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

L'ordonnée OT du point T est donc $(X = 0)$:

$$Y = y - x\frac{dy}{dx}.$$

L'aire du trapèze OTMP est

$$x\frac{y + Y}{2} = \frac{x}{2}\left(2y - x\frac{dy}{dx}\right).$$

L'équation différentielle de la courbe est donc

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + 2a^2 = 0.$$

En appliquant à cette équation linéaire le procédé classique, on trouve l'intégrale générale

$$y = \frac{x^2}{3p} + \frac{2a^2}{3x},$$

où p désigne une constante arbitraire.

On voit que la courbe s'obtient en faisant la somme des ordonnées de même abscisse de la parabole

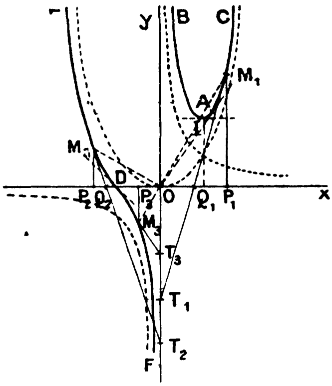
$$y = \frac{x^2}{3p}$$

et de l'hyperbole équilatère

$$y = \frac{2a^2}{3x}.$$

Ceci donne immédiatement la courbe qui a la forme (I) (*fig.* 4) quand p est positif et la forme (II) (*fig.* 5) quand p est négatif. Pour $\frac{1}{p} = 0$, on a, en particulier, l'hyperbole, ce qui était à prévoir. On passe d'ailleurs de la forme (I) à la forme (II) par une

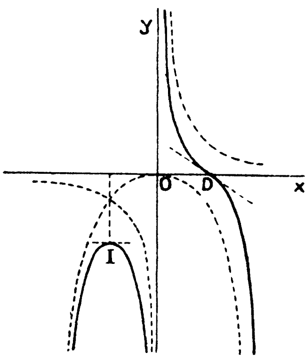
Fig. 4 (forme I).



symétrie par rapport à l'origine.

Le point I où la tangente est parallèle à Ox s'obtient

Fig. 5 (forme II).



en égalant à zéro la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3p} - \frac{2a^2}{3x^2} = \frac{2}{3}\,\frac{x^3 - a^2p}{px^2},$$

qui a pour racine réelle unique

$$x = \sqrt[3]{a^2 p}.$$

Le point d'inflexion s'obtient en cherchant la valeur pour laquelle s'annule la dérivée seconde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{p} + \frac{2a^2}{x^3}\right) = \frac{2y}{x^2}.$$

Cette dérivée s'annule en même temps que y pour

$$x = -\sqrt[3]{2a^2 p};$$

le point d'inflexion D est donc le point où la courbe coupe Ox.

De l'origine O menons la tangente OA à la courbe. L'abscisse de A est donnée par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

qui s'écrit

$$\frac{x}{3p} = \frac{4a^2}{3x^2}$$

et a pour racine réelle unique

$$x = \sqrt[3]{4a^2 p}.$$

La courbe (*fig.* 4) est ainsi partagée en quatre arcs : BA, AC, ED et DF. L'arc BA correspond à l'énoncé.

D'ailleurs pour *tout* point M de la courbe on a :

$$a^2 = \frac{xy}{2} + \frac{xY}{2};$$

$\frac{xy}{2}$ est, au signe près (*fig.* 1), l'aire du triangle OMP, et $\frac{xY}{2}$ est celle du triangle OMT.

Pour un point M_1 de l'arc AC on a

$$x > 0, \qquad y > 0, \qquad Y < 0;$$

donc

$$a^2 = \text{aire } OM_1P_1 - \text{aire } OM_1T_1$$

ou

$$a^2 = \text{aire } M_1Q_1P_1 - \text{aire } OQ_1T_1,$$

Q_1 étant le point d'intersection de la tangente avec Ox.

Pour un point M_2 de l'arc ED on a

$$a^2 = \text{aire } OM_2T_2 - \text{aire } OM_2P_2$$

ou

$$a^2 = \text{aire } OQ_2T_2 - \text{aire } M_2Q_2P_2.$$

Enfin pour un point M_3 de l'axe DF on a

$$a^2 = \text{aire } OM_3P_3 + \text{aire } OM_3T_3 = \text{aire } OP_3M_3T_3.$$

On voit que, lorsque le trapèze OPMT est convexe, l'équation exprime que son aire est égale à a^2 et que, lorsque le trapèze est concave, a^2 est égal à la différence des aires des deux triangles formés par le recoupement des côtés non parallèles.

Si l'on convient d'appeler *aire* du trapèze concave la somme *algébrique* des aires des deux triangles qui le forment, l'aire d'un de ces triangles étant précédée du signe + ou du signe — suivant qu'un mobile, parcourant le contour MTOP du trapèze dans le sens de M vers T, a l'aire du triangle à sa gauche ou à sa droite, on peut dire que, dans tous les cas, *l'aire du trapèze* MTOP *est égale à a^2.*

Dans le cas particulier où la courbe passe par le point $x = a$, $y = a$; on a $p = a$ et ce point est précisément le point I où $\frac{dy}{dx} = 0$. En ce point on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}.$$

Le rayon de courbure est donc égal à $\frac{a}{2}$.

Pour $x = -a$ on a $y = -\frac{a}{3}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3a}.$$

Le rayon de courbure est donc

$$R = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{16}{9}\right)^3}}{\frac{2}{3a}} = \frac{125a}{18}.$$

III. En O (*fig.* 2) la force F est égale à kl, puisque $r = 2l$. Pour que le point soit en équilibre il faut et il suffit que

$$kl = mg,$$

$$m = \frac{kl}{g} \qquad \text{ou} \qquad k = \frac{mg}{l}.$$

Prenons alors O comme origine des abscisses et comme sens positif sur la verticale AO le sens de haut en bas, de A vers O. Soit $\overline{OM} = x$; on a

$$r = 2l + x,$$

d'où

$$F = k(l + x) = mg + \frac{mg}{l}x.$$

L'équation différentielle du mouvement du point est alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - \frac{mg}{l}x + mg,$$

ou

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x.$$

Il est bon de remarquer de suite que cette équation n'est valable que *si le fil est tendu*, c'est-à-dire si l'on a

$$r \geqq l, \qquad \text{ou} \qquad x \geqq -l.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$x = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

et, d'après les données initiales, on doit avoir, pour $t = 0$,

$$x_0 = r_0 - 2l, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0,$$

ce qui donne

$$A = r_0 - 2l, \qquad B = 0.$$

L'équation du mouvement est

$$(2) \qquad x = (r_0 - 2l)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

D'après la remarque précédente elle ne sera *constamment* applicable que si l'on a toujours $x \geqq -l$. Le minimum de x est $-(r_0 - 2l)$. Ceci aura donc lieu si

$$-r_0 + 2l \geqq -l, \qquad \text{ou} \qquad r_0 \leqq 3l.$$

Nous distinguerons donc deux cas :

1° $r_0 \leqq 3l$. Le mouvement de M est un mouvement oscillatoire, autour de la position moyenne O, de période $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ et d'amplitude $2(r_0 - 2l)$. Le point oscille entre M_0 et le point M'_0 symétrique de M_0 par rapport à O.

En particulier M'_0 coïncide avec B si $r_0 = 3l$.

2° $r_0 > 3l$. Dans ce cas le mouvement *commence* par être régi par l'équation (2). Le point M remonte de M_0 en O, passe en O au temps $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ et atteint le point B à un instant t_1 tel que

$$-l = (r_0 - 2l)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t_1,$$

avec une vitesse v_1

$$v_1 = -(r_0 - 2l)\sqrt{\frac{g}{l}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t_1.$$

On a donc

$$v_1^2 = (r_0 - 2l)^2 \frac{g}{l}\left[1 - \frac{l^2}{(r_0 - 2l)^2}\right],$$

$$v_1^2 = \frac{g}{l}(r_0 - l)(r_0 - 3l),$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{l}(r_0 - l)(r_0 - 3l}.$$

A ce moment le fil *se détend* et le point est un point pesant *libre*. Il remonte donc d'un mouvement uniformément retardé, au-dessus de B, jusqu'à une hauteur h telle que

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(r_0 - l)(r_0 - 3l)}{2l},$$

puis redescend et revient en B avec la vitesse $|v_1|$. Le fil se tend à nouveau, le mouvement oscillatoire reprend, le point descend jusqu'en M_0 où sa vitesse s'annule; et tout recommence comme précédemment.

Pour que le point arrive en A avec une vitesse nulle, il faut et il suffit que l'on ait

$$h = l,$$

ou

$$(r_0 - l)(r_0 - 3l) = 2l^2,$$

$$r_0^2 - 4lr_0 + l^2 = 0.$$

On prend pour r_0 la racine plus grande que $3l$:

$$r_0 = (2 + \sqrt{3})\, l.$$

Déuxième composition de Mathématiques
(Sciences I).

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

---

1. Ox, Oy, Oz, *étant trois axes de coordonnées rectangulaires, montrer que l'équation*

$$y^2z^2 + 2kxyz + k^2x^2 - 2ak^2y = 0,$$

où a et k désignent deux longueurs données, définit une surface réglée (Σ). *Trouver les traces et les contours apparents de cette surface sur les plans de coordonnées. Indiquer une construction géométrique des génératrices rectilignes de la surface.*

2. *A quelle condition les coefficients de l'équation*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

doivent-ils satisfaire, pour que le plan représenté par cette équation contienne une génératrice de la surface? Quelles sont, en supposant cette condition vérifiée, les coordonnées du point de contact du plan et de la surface?

3. *L'intersection de la surface* (Σ) *et du cylindre dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

se compose de l'axe Oz *et d'une courbe gauche* (C); *exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre les coordonnées d'un point quelconque de* (C). *Une génératrice du cylindre rencontre la courbe* (C) *en deux points : lieu du milieu de ces deux points.*

4. *La section de* (Σ) *par un plan parallèle à* xOy *est une parabole* (P); *exprimer, en fonction de la cote de son plan, le paramètre de cette parabole; trouver le lieu de son foyer et celui de son sommet; construire les projections de ces courbes sur les plans de coordonnées.*

5. *La parabole* (P) *se projette sur* xOy, *suivant une parabole* (Q); *chercher les enveloppes de l'axe et de la directrice de* (Q).

Indiquer, dans le plan xOy, *une définition géométrique des paraboles* (Q).

6. *Il existe, sur chacune des paraboles* (Q), *un point* M *tel que le cercle osculateur en* M *passe par* O : *trouver le lieu du point* M.

1. Le cône directeur de la surface se composant des plans $y = 0$ et $z = 0$, elle ne peut admettre que des génératrices parallèles à ces plans; or l'équation de la surface (Σ) s'écrit :

$$(yz + kx)^2 - 2ak^2y = 0 \tag{1}$$

et sous cette forme on voit que seuls les plans parallèles au plan xOz la coupent suivant des droites :

$$y = \mu,$$
$$\mu z + kx = \pm k\sqrt{2a\mu}.$$

Chacun de ces plans coupe la surface suivant deux droites parallèles, le reste de l'intersection étant rejeté à l'infini suivant la droite à l'infini du plan xOz qui est une droite double de (Σ). Ces génératrices ne sont réelles que si $\mu > 0$. La surface est située tout entière du côté des y positifs.

Pour avoir un paramètre qui entre rationnellement dans les équations, posons

$$2a\mu = \lambda^2$$

et les équations d'une génératrice quelconque seront

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2ay - \lambda^2 = 0, \\ \lambda^2 z + 2ak(x-\lambda) = 0. \end{array}\right.$$

Les deux génératrices G et G' situées dans un même plan parallèle au plan xOz correspondent à deux valeurs opposées de λ.

La trace sur le plan $y = 0$ est l'axe Oz, *deux fois*. La surface est *tangente* au plan zOx tout le long de Oz. La trace sur le plan $z = 0$ est la parabole P_0 :

$$x^2 - 2ay = 0;$$

celle sur le plan $x = 0$ est l'axe Oz et la cubique Q_0 :

$$yz^2 - 2ak^2 = 0,$$

admettant Oy comme axe de symétrie et asymptote à Oz et Oy.

Les contours apparents en projection sont les enveloppes des projections des génératrices.

Le contour apparent sur le plan xOz est donc l'enveloppe de la droite

$$\lambda^2 z - 2ak\lambda + 2akx = 0$$

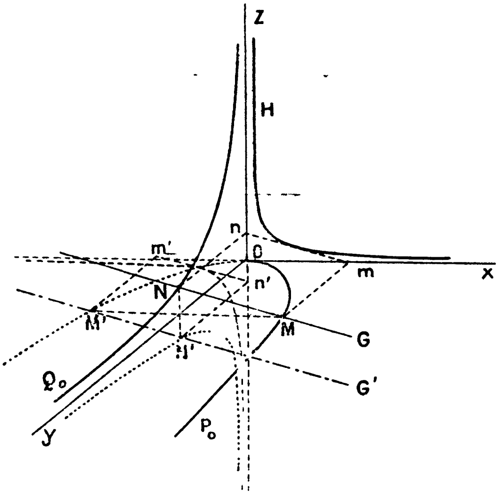
qui est l'hyperbole équilatère H

$$2xz - ak = 0.$$

Les génératrices se projettent sur le plan yOz suivant des parallèles à Oz et sur zOx suivant des parallèles à Ox. Les contours apparents sur ces deux plans sont les projections des génératrices limites. Ce sont les traces Oz et Ox du plan tangent zOx.

On a alors une idée nette de la surface (Σ). Un plan parallèle au plan zOx (*fig.* 6) coupe la surface sui-

Fig. 6.



vant deux génératrices parallèles G et G′ s'appuyant sur la parabole P_0 et la cubique Q_0 en M, N et M′, N′. Lorsque le plan sécant coïncide avec le plan zOx les deux génératrices G et G′ se confondent avec Oz. Lorsque le plan s'éloigne indéfiniment du côté des y positifs les deux droites G et G′ s'éloignent toutes deux indéfiniment dans le plan xOy et viennent coïncider avec la droite à l'infini de ce plan qui est une seconde droite double de la surface.

Pour construire géométriquement une génératrice G nous prenons un point M de la parabole P_0. Soit m la projection de M sur Ox. De m nous menons l'unique tangente mn à l'hyperbole H de contour apparent; la génératrice G est la parallèle MN menée par M à mn.

2. Pour que le plan

$$Ax + By + Cz + D = o$$

contienne la génératrice G définie par les équations (2) il faut que l'équation

$$A\left(\lambda - \frac{\lambda^2 z}{2ak}\right) + B\frac{\lambda^2}{2a} + Cz + D = o$$

soit vérifiée quel que soit z; ce qui donne

$$C - \frac{\lambda^2 A}{2ak} = o,$$

$$A\lambda + B\frac{\lambda^2}{2a} + D = o;$$

en éliminant λ entre ces deux équations on aura la condition pour que le plan contienne au moins une génératrice.

La première équation donne

$$\lambda^2 = \frac{2akC}{A},$$

cette valeur portée dans la seconde fournit

$$(3) \qquad \lambda = -\frac{kBC + AD}{A^2};$$

et la condition cherchée est

$$(4) \qquad (kBC + AD)^2 = 2akCA^3.$$

C'est l'équation tangentielle de la surface. Si elle est vérifiée le plan contient la génératrice correspondante à la valeur de λ fournie par l'équation (3) et il est tangent au point

$$x = \frac{(kBC + AD)D - 3akCA^2}{(kBC + AD)A},$$

$$y = k\frac{C}{A},$$

$$z = \frac{(kBC + AD)kB - akA^3}{(kBC + AD)A}.$$

3. Pour avoir la courbe (C) il suffit de chercher le lieu des points d'intersection de la génératrice G avec le cylindre

$$x^2+y^2-2ay=0. \tag{5}$$

On aura les coordonnées d'un point en fonction de λ en résolvant le système des trois équations (2) et (5), en x, y, z, ce qui donne

$$x=\pm\frac{\lambda}{2a}\sqrt{4a^2-\lambda^2},$$

$$y=\frac{\lambda^2}{2a},$$

$$z=\frac{2ak}{\lambda}\mp\frac{k}{\lambda}\sqrt{4a^2-\lambda^2}.$$

Pour avoir des expressions rationnelles posons

$$\pm\sqrt{4a^2-\lambda^2}=(2a-\lambda)t.$$

On en tire

$$\lambda=2a\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad \pm\sqrt{4a^2-\lambda^2}=\frac{4at}{t^2+1},$$

et, par suite,

$$x=\frac{4at(t^2-1)}{(t^2+1)^2},$$

$$y=2a\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2,$$

$$z=k\frac{t-1}{t+1}.$$

Cette courbe est du cinquième ordre. Cela tient à ce que l'intersection complète du cylindre et de (Σ) comprend en outre trois fois l'axe Oz.

On voit que x et y pourraient s'exprimer rationnellement en z :

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{4akz(k^2-z^2)}{(k^2+z^2)^2},\\ y&=\frac{8ak^2z^2}{(k^2+z^2)^2}.\end{aligned}\right. \tag{C}$$

Les deux points d'intersection d'une génératrice G avec la courbe (C) sont évidemment ses deux points d'intersection avec le cylindre dont le milieu N est dans le plan diamétral correspondant, qui est le plan yOz. Le lieu du milieu N est donc la cubique Q_0, trace de la surface (Σ) sur le plan yOz.

4. Le plan horizontal de cote z coupe la surface (Σ) suivant la droite double à l'infini et une parabole (P) dont la projection horizontale (Q) a pour équation l'équation (1), où l'on considère z comme un paramètre.

On peut remarquer que l'équation (1) est l'équation générale des paraboles osculatrices au cercle (5) au point O. Les résultats qui suivent sont alors classiques. Ceci permettait aussi de prévoir que tout plan horizontal ne coupe la courbe (C) précédente qu'en un point et que le cylindre a l'axe Oz trois fois en commun avec (Σ).

Pour mettre en évidence l'axe et la tangente au sommet de cette parabole (Q) écrivons l'équation sous la forme

$$(yz + kx + \rho)^2 - 2\rho kx - 2(ak^2 + \rho z)y - \rho^2 = 0$$

et choisissons ρ de façon que les deux droites

$$yz + kx + \rho = 0,$$
$$2\rho kx + 2(ak^2 + \rho z)y + \rho^2 = 0$$

soient rectangulaires. Ceci donne

$$\rho k^2 + (ak^2 - \rho z)z = 0,$$
$$\rho = -\frac{ak^2 z}{z^2 + k^2}$$

et l'équation de la parabole (Q) s'écrit

$$\left(yz + kx - \frac{ak^2 z}{z^2 + k^2}\right)^2 + \frac{2ak^3}{k^2 + z^2}\left(zx - ky - \frac{akz^2}{2(k^2 + z^2)}\right) = 0.$$

Changeons de coordonnées en prenant pour axes l'axe de la parabole et la tangente au sommet. Les nouvelles coordonnées X, Y sont alors les distances du point (x, y) à ces deux droites et l'on a

$$(6)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+z^2}}\left(-zx+ky+\dfrac{akz^2}{2(k^2+z^2)}\right), \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+k^2}}\left(\quad kx+zy-\dfrac{ak^2z}{z^2+k^2}\right). \end{cases}$$

L'équation de la parabole est alors

$$Y^2 - 2\frac{ak^3}{(z^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}X = 0.$$

Le *paramètre* de la parabole est donc

$$(7)\qquad p = \frac{ak^3}{(z^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le *sommet* est le point $X = 0$, $Y = 0$ ou, en résolvant en x et y,

$$(S)\quad \begin{cases} x = \dfrac{akz(z^2+2k^2)}{2(z^2+k^2)^2}, \\ y = \dfrac{ak^2z^2}{2(z^2+k^2)^2}. \end{cases}$$

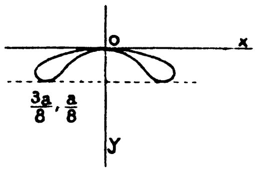
Ces équations, si l'on y considère z comme une coordonnée, définissent le lieu du sommet dans l'espace. Si l'on y regarde z comme un paramètre elles donnent la projection du lieu sur le plan xOy. Cette projection est une quartique unicursale, qui a la forme de la figure 7.

Le *foyer* est le point $X = \frac{p}{2}$, $Y = 0$, ce qui donne, en vertu des formules (6) et (7), et en résolvant en x

et y,

$$(F)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{akz}{2(z^2+k^2)},\\ y &= \frac{ak^2}{2(z^2+k^2)}.\end{aligned}\right.$$

Fig. 7.



Cette courbe est un *cercle*, car on a

$$x^2+y^2=\frac{a}{2}y.$$

5. La *directrice* a pour équation $X=-\frac{p}{2}$, ce qui s'écrit, en vertu des formules (6) et (7),

$$(D)\qquad -zx+ky+\frac{ak}{2}=0.$$

Elle passe par le point fixe

$$x=0,\qquad y=-\frac{a}{2}.$$

L'équation de l'*axe* est $Y=0$ ou

$$kx+zy-\frac{ak^2z}{z^2+k^2}=0.$$

L'enveloppe s'obtient en lui adjoignant l'équation dérivée par rapport à z

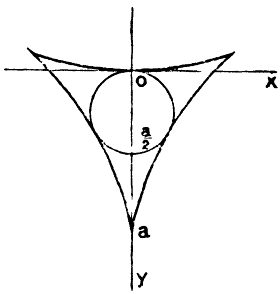
$$y-ak^2\frac{k^2-z^2}{(z^2+k^2)^2}=0.$$

L'enveloppe est donc la quartique unicursale

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{2ak^2z^3}{(z^2+k^2)^2},\\ y &= \frac{ak^2(k^2-z^2)}{(z^2-k^2)^2}.\end{aligned}\right.$$

C'est l'hypocycloïde à trois rebroussements indiquée dans la figure 8, circonscrite au cercle lieu du foyer.

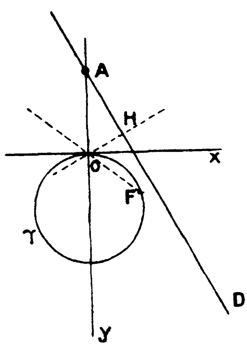
Fig. 8.



Les paraboles (Q) se définissent alors simplement géométriquement.

Soient γ le cercle (*fig.* 9) décrit par le foyer F, A le

Fig. 9.



point ($x=0, y=-a$) par lequel passe la directrice D. Pour avoir une parabole (Q), menons par A une droite arbitraire D qui sera la directrice. La parabole cherchée passe par O et est tangente à Ox. Le rayon vecteur OF est donc le symétrique par rapport à Ox de la perpendiculaire OH abaissée de O sur D; ce qui détermine le foyer F.

6. Pour que le point M (x, y) de la parabole (Q) soit le point de contact d'un cercle osculateur passant par O, il faut et il suffit que la droite OM et la tangente MT en M à la parabole soient également inclinées sur la directrice D. Les coefficients angulaires de OM, MT et D sont

$$-\frac{k(yz - kx)}{z(yz + kx) - ak^2}, \quad \frac{y}{x}, \quad \frac{z}{k}.$$

En exprimant que la troisième direction est bissectrice des deux premières, on trouve la condition

$$(yz + kx)^2(z^2 + k^2) - ak^2 z(yz + kx) + ak^3(ky - zx) = 0.$$

Cette équation jointe à celle de la parabole donne le point (x, y). En y remplaçant $(yz + kx)^2$ par $2ak^2y$ [équation (1)], on conclut finalement que le point x, y est donné par l'intersection de la parabole (Q) d'équation (1) et de la droite

$$y(z^2 + 3k^2) - 2kzx = 0.$$

Cette droite coupe la parabole, en dehors de l'origine, au point M cherché

$$(\mathrm{M}) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{4akz(z^2 + 3k^2)}{9(z^2 + k^2)^2}, \\ y &= \frac{8ak^2z^2}{9(z^2 + k^2)} \end{aligned} \right.$$

On a ainsi les coordonnées de M exprimée rationnellement en fonction du paramètre z.

Cette courbe unicursale a la même forme que le lieu du sommet (*fig.* 7).

N. B. — Nous avons reçu une solution analogue de M. Bouvaist.