# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 7 (1907), p. 40-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__40_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### 2029.

(1905, p. 576; 1906, p. 430.)

*On projette un point* M *d'une ellipse en* P *et* Q *sur les diamètres conjugués égaux. Montrer que le milieu* I *de* PQ *est situé sur la normale à l'ellipse en* M *et que le point de Frégier relatif à* M *est le symétrique de* M *par rapport à* I. (E.-N. Barisien.)

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES

Par M. A. Mannheim.

La première partie de cet énoncé a déjà été proposée en 1842 dans les *Nouvelles Annales*. Elle fait l'objet de la question 3 insérée dans le Tome I$^{er}$ de ce Recueil sous la signature de Steiner. Le même Volume renferme deux solutions analytiques de cette question, pages 142 et 429.

### PREMIÈRE SOLUTION.

L'ellipse est le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux droites est constante. On a donc

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = \text{const.};$$

d'où

$$MP\,d.MP + MQ\,d.MQ = 0.$$

Prenons le point M' de l'ellipse infiniment voisin de M et abaissons la perpendiculaire M'P', on a

$$d.MP = MM' \cos MM'P',$$

de même pour $d.MQ$. Portant ces valeurs dans la relation précédente et supprimant le facteur MM', on trouve que les projections de MP et de MQ sur la tangente en M sont égales et de signes contraires. Il résulte de là que la normale en M passe par le milieu de PQ.

### DEUXIÈME SOLUTION.

Menons les parallèles MB, MC aux diamètres conjugués égaux. Appelons R, T les points où ces diamètres sont coupés par la tangente en M. Les produits $OC \times OT$ et $OB \times OR$ étant égaux aux demi-diamètres conjugués égaux sont égaux. On peut alors écrire

$$\frac{OT}{OR} = \frac{OB}{OC}.$$

Par rapport au grand axe de l'ellipse prenons les symétriques B', M', C' des points B, M, C. La dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{OT}{OR} = \frac{OB'}{OC'},$$

ce qui montre que B'C' est parallèle à la tangente en M.

Les triangles MBP, MCQ sont semblables et donnent

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{MB}{MC},$$
$$= \frac{B'M'}{B'O'}.$$

Les triangles MPQ, OB'M' ont les angles PMQ, M'B'O égaux et les côtés qui comprennent ces angles proportionnels, ils sont alors semblables. En outre, comme ils ont leurs côtés homologues perpendiculaires, la droite MI qui passe par le milieu de PQ est perpendiculaire à B'C' qui passe par le milieu de OM'.

La droite MI est alors normale à l'ellipse, puisque nous avons vu que B'C' est parallèle à la tangente en M.

### TROISIÈME SOLUTION.

Les diamètres conjugués de l'ellipse forment un faisceau en involution. Il en est de même des perpendiculaires abaissées de M sur ces diamètres. Prenons, dans le cercle de diamètre OM, les cordes sous-tendues par les couples de rayons homologues de ce dernier faisceau, nous aurons des droites qui passent par un même point. Parmi ces cordes, il y a la droite PQ, puis le diamètre VU qui joint les pieds des perpendiculaires MV, MU abaissées de M sur les axes de l'ellipse, et enfin la normale en M, car cette droite joint les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur OM et sur son diamètre conjugué qui est parallèle à la tangente en M à l'ellipse. D'après cela, si I est le point de rencontre de PQ et de VU, la droite MI est normale à l'ellipse.

Les droites MP, MQ sont également inclinées sur MU. Le point U est alors le milieu de l'arc PUQ et le diamètre VU est perpendiculaire à PQ, le point I est alors le milieu de PQ.

Il reste encore à traiter la deuxième partie de l'énoncé.

Prolongeons MV jusqu'à sa rencontre en M″ avec l'ellipse. La droite M'M″ coupe la normale MI au point de Frégier relatif à M. Ce point est le symétrique de M par rapport à I, puisque U est le milieu de MM' et que la droite UV est parallèle à M'M″.

## 2036.

(1906, p. 96.)

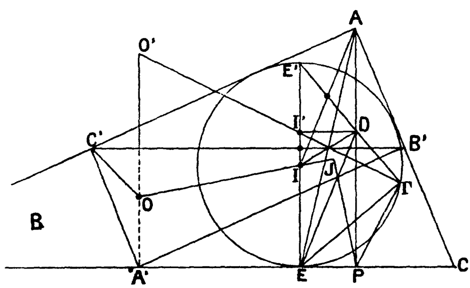
*Soient* ABC *un triangle,* O *et* I *les centres des cercles circonscrit et inscrit à ce triangle,* B′ *et* C′ *les milieux des côtés* AC *et* AB. *La droite symétrique de* OI, *par rapport à la droite* B′C′, *passe par le point de contact* Γ *du cercle des neuf points du triangle* ABC *et du cercle inscrit à ce même triangle.* (R. B.)

SOLUTION

Par M. A. Mannheim.

Le cercle inscrit au triangle ABC (*fig.* 1) a pour centre I,

Fig. 1.




il touche BC au point E, dont le symétrique, par rapport à I, est E′. Pour déterminer le point de contact Γ du cercle des neuf points de ABC et du cercle inscrit à ce triangle, j'ai fait connaître ce résultat (1) : la droite qui joint E′ au milieu de AI coupe le cercle inscrit au point Γ, qui est le point de Feuerbach.

Soit D le point de rencontre de E′Γ et de la hauteur AP, les angles DΓE, DPE étant droits, les points D, Γ, P, E sont sur un cercle dont le centre est le milieu de DE. Ce cercle

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires,* 1902, p. 95.

coupe EE′ au point I′, quatrième sommet du rectangle EPDI′, l'angle I′ΓP est droit. Le segment AD est égal et parallèle à E′I, et alors aussi à IE. Les droites AE, ID se coupent mutuellement en parties égales; on voit ainsi que I′ est le symétrique de I, par rapport à B′C′, droite qui passe par le milieu de AE.

Ainsi, *la perpendiculaire* ΓI′ *à* ΓP *coupe* EE′ *au point* I′ *symétrique du centre* I *par rapport à* B′C′.

Prolongeons ΓI′ jusqu'à sa rencontre O′ avec la perpendiculaire à BC élevée du milieu A′ de ce côté. Les points O′, A′, P, Γ appartiennent à un cercle, mais A′, P, Γ sont sur le cercle des neuf points du triangle ABC; donc O′ est aussi sur ce cercle. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est l'orthocentre du triangle A′B′C′; donc O′ et O sont symétriques par rapport à B′C′.

Ainsi, *la droite* ΓI′, *qui contient le symétrique de* I *par rapport à* B′C′, *contient aussi le point* O′, *symétrique de* O *par rapport à la même droite.*

Le théorème proposé est ainsi démontré. On voit en outre que *la droite* O′I′ *est perpendiculaire en* Γ *à la droite* ΓP.

*Remarques.* — 1° Par rapport à B′C′, la droite symétrique de O′I′ est la ligne des centres OI, et la droite symétrique de PΓ est une parallèle à la droite PJ qui elle-même est la symétrique de PΓ par rapport à la hauteur PA. Mais la droite O′I′ est perpendiculaire à PΓ; par suite PJ est perpendiculaire à OI.

Ainsi, *la symétrique de* PΓ, *par rapport à* PA, *est perpendiculaire à la ligne des centres* OI. Inversement, on peut dire : *la perpendiculaire* PJ *abaissée du pied de la hauteur* AP *sur la ligne des centres* OI *a pour symétrique, par rapport à cette hauteur, une droite* PΓ *qui passe par le point de Feuerbach.*

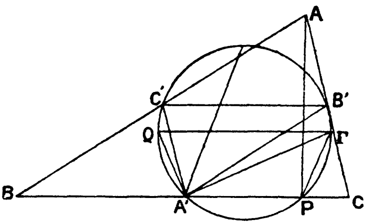
2° Par Γ (*fig.* 2) menons la corde ΓQ du cercle des neuf points parallèlement à BC. On voit tout de suite que la droite A′Q est parallèle à PJ et qu'elle est aussi la symétrique de A′Γ par rapport à la bissectrice de l'angle B′A′C′.

D'après cela, A′Q *donne la direction des diamètres de la parabole tangente aux côtés du triangle* A′B′C′ *et qui a* Γ *pour foyer,* c'est-à-dire que *ces diamètres sont perpendiculaires à* OI.

Mais *le centre* O *est l'orthocentre de* A′B′C′; *donc la* *ligne des centres* OI *est la directrice de cette parabole* (¹).

3° Le cercle des neuf points de ABC contient deux points de chacun des côtés de ce triangle. On compte en outre sur ce cercle trois autres points qui sont les milieux des segments compris entre l'orthocentre de ABC et les sommets de ce

Fig. 2.




triangle. On pourrait compter aussi les points tels que O′, qui sont les symétriques du centre O par rapport aux côtés du triangle A′B′C′ et l'on devrait dire alors *le cercle des douze points*.

*Note de la Rédaction.* — La question 2036 se trouve aussi résolue par l'article de M. R. Bouvaist (1906, p. 510).

## 2040.

(1906, p. 142.)

*Attachant aux mots de* semi-plan *et de* semi-sphère *les sens que leur a donnés Laguerre, démontrer les théorèmes suivants :*

1° *Les cinq semi-sphères qui touchent cinq semi-plans quelconques, pris quatre à quatre, touchent une même semi-sphère.*

2° *Étant données cinq semi-sphères qui touchent une semi-sphère* (S), *il existe, outre* (S), *une semi-sphère qui*

---

(¹) La droite de Simson de Γ par rapport au triangle A′B′C′ est parallèle à OI. Cette propriété a été énoncée par M. Ch. Michel, et j'en ai donné une démonstration directe (*Bulletin élémentaire*, 1904, p. 291).

*touche quatre quelconques d'entre elles. Les cinq semi-sphères ainsi obtenues touchent une même semi-sphère.*

(R. B.)

SOLUTION

Par M. Thié.

Un plan peut être considéré comme une sphère de rayon infini qui touche la sphère réduite au plan de l'infini compté deux fois. La première partie de l'énoncé n'est donc qu'un cas particulier de la seconde, qu'il suffit de démontrer.

Appliquons à la figure la transformation de Sophus Lie. Cette transformation fait correspondre à la sphère, de centre $(x, y, z)$ et de rayon R, la droite dont les équations sont

$$X = aZ + p,$$
$$Y = bZ + q,$$

par les formules

$$a = x + yi, \qquad b = z + R,$$
$$q = x - yi, \qquad p = R - z.$$

A une sphère, dont le rayon est donné seulement en valeur absolue, correspondent deux droites, mais à une *semi-sphère,* dont le rayon a un signe bien déterminé, correspond une droite unique.

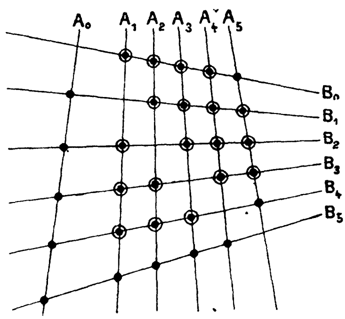
Comme la transformation change deux semi-sphères tangentes en deux droites qui se coupent, le théorème à démontrer est transformé en le suivant :

*Soient cinq droites quelconques* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ *qui rencontrent une même droite* $B_0$. *Il existe, outre* $B_0$, *une droite* $B_1$ *qui rencontre les quatre droites* $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$; *une droite* $B_2$ *qui rencontre les quatre droites* $A_1$, $A_3$, $A_4$, $A_5$; *etc. Les cinq droites* $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ *rencontrent une même droite* $A_0$.

Les droites $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ et $B_0$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ se rencontrent en 25 points, comme l'indique la figure ci-après.

Il existe une surface du troisième ordre ($\Sigma$) qui passe par les 19 points entourés sur la figure d'un petit cercle. Cette surface contient les 11 droites considérées, comme on le voit immédiatement (par exemple, contenant quatre points de la droite $A_1$, elle la contient tout entière, etc.).

Ceci posé, il existe, outre $A_1$, une droite qui rencontre $B_2$, $B_3$, $B_4$ et $B_5$. Désignons-la par $A_0$. Je dis que $A_0$ [qui appartient évidemment à $(\Sigma)$] rencontre $B_1$. En effet, s'il en est




autrement, considérons la section de $(\Sigma)$ par le plan $(B_1 A_2)$. Cette section, comprenant les deux droites $B_1$ et $A_2$, doit comprendre une droite $C_2$, et $A_0$ qui ne rencontre ni $B_1$ ni $A_2$ doit rencontrer $C_2$. Il en est de même de $A_1$. Autrement dit, il existe sur $(\Sigma)$ une droite $C_2$ qui rencontre $A_0$, $A_1$ et $B_1$. On reconnaît de même l'existence de trois autres droites de $(\Sigma)$, $C_3$, $C_4$ et $C_5$, qui rencontrent toutes $A_0$, $A_1$ et $B_1$.

Ces quatre droites $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$ appartiennent à la quadrique $(Q)$ déterminée par les droites $A_0$, $A_1$ et $B_1$.

$(Q)$ et $(\Sigma)$ auraient donc en commun les *sept* droites $A_0$, $A_1$, $B_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$, ce qui est impossible, si $(Q)$ ne fait pas partie de $(\Sigma)$. Comme on suppose que $(\Sigma)$ est une véritable surface du troisième ordre, l'hypothèse faite est inadmissible et $A_0$ rencontre $B_1$. Le théorème est ainsi démontré.

La configuration constituée par les douze droites $A_0, \ldots, A_6$ et $B_0, \ldots, B_6$ est bien connue sous le nom de *double-six de Schläfli*.

## 2041.

(1906, p. 191.)

*Démontrer l'identité suivante, relative au triangle* *arithmétique :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 6 & 10 & \dots & . \\ 4 & 10 & 20 & \dots & . \\ . & .. & .. & \dots & . \\ n & .. & .. & \dots & . \end{vmatrix} = n.$$

(G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. P. SONDAT.

Dans le déterminant $\Delta_n$ remplaçons les horizontales successives $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$, ... par $H_1$, $H_2 - H_1$, $H_3 - 2H_2 + H_1$, $H_4 - 3H_3 + 3H_2 - H_1$, ..., et nous aurons

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots & . \\ 0 & 1 & 4 & 10 & \dots & . \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \dots & . \\ . & . & . & .. & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Dans ce nouveau déterminant opérons de même sur les verticales $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, ..., et il viendra

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & . & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & . & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Comme

$$n = 2(n-1) - (n-2),$$

si l'identité a lieu pour $n-2$ et $n-1$, elle aura lieu aussi pour $n$. Or $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 3$, et par suite

$$\Delta_4 = 4, \qquad \Delta_5 = 5, \qquad \dots, \qquad \Delta_n = n.$$

C. Q. F. D.