NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur les formules de Salmon analogues aux formules de Plucker

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 433-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__433_0>

[$M^2 1 b$]

SUR LES FORMULES DE SALMON ANALOGUES AUX FORMULES DE PLUCKER;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Nous appellerons *singularités essentielles d'une surface* celles qui existent généralement sur la surface ou sur sa polaire réciproque; elles comprennent les singularités tangentielles qui existent lorsqu'on part d'une équation ponctuelle générale (plans bitangents, ...), et les singularités ponctuelles corrélatives de celles-là (courbe nodale, ...). La détermination des relations qui existent entre l'ordre n de la surface, sa classe n', et les nombres relatifs aux singularités en question, est due à Salmon (1847-1850), sauf l'exception suivante. Clebsch a introduit la notion de *genre* pour une surface, en appelant ainsi le nombre de constantes arbitraires contenues (d'une manière homogène) dans l'équation d'une surface d'ordre $n - 4$ qui passe par les courbes doubles, courbe nodale et courbe cuspidale, de la surface donnée; Cayley a donné l'expression du genre en fonction du degré n et des nombres relatifs aux singularités ponctuelles, et, en égalant cette expression à sa corrélative, il a obtenu la dernière relation entre les nombres considérés ci-dessus.

La Note actuelle a été rédigée d'après le *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* de Salmon. On y trouvera un exposé méthodique de la question : définitions, formules fondamentales constituant une mise en équation du problème, formules dérivées donnant la solution du problème ; je n'ai pas cru devoir reproduire la démonstration des formules fondamentales, mais j'ai insisté sur l'explication *a priori* du terme principal des formules dérivées. J'ai d'ailleurs laissé de côté les singularités non essentielles introduites par Cayley, points coniques, ..., mon but étant de montrer que la connaissance de l'ordre n et des nombres relatifs aux singularités ponctuelles qui sont essentielles entraîne (*en l'absence de singularités accidentelles*) la connaissance de la classe n' et des nombres relatifs aux singularités tangentielles. La notation (II, 77) renverra au *Traité de Salmon*, 2e Partie, page 77.

2. Je rappelle d'abord, avec les notations habituelles de la Géométrie plane, les formules de Plücker :

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3\varkappa, \qquad m = n(n-1) - 2\tau - 3i,$$
$$i = 3m(m-2) - 6\delta - 8\varkappa, \qquad \varkappa = 3n(n-2) - 6\tau - 8i.$$

A priori, il y a là seulement trois relations distinctes permettant de calculer n, τ, i, quand on connaît m, δ, $\varkappa$, et inversement ; et en effet, l'élimination de δ entre les deux premières, ou celle de τ entre les deux dernières, donne également

$$3n - i = 3m - \varkappa$$

ou

$$i - \varkappa = 3(n - m).$$

Si l'on observe que les deux formules de la première ligne donnent, par soustraction,

$$2(\tau - \delta) + 3(i - \varkappa) = n^2 - m^2,$$

ou

$$2(\tau - \delta) = (n - m)(n + m - 9),$$

on obtient les deux systèmes équivalents

$$\left\{\begin{aligned} n &= m(m-1)-2\delta-3\varkappa \\ i &= 3m(m-2)-6\delta-8\varkappa \end{aligned}\right. \quad [i-\varkappa = 3(n-m)],$$
$$\left.\begin{aligned} 2(\tau-\delta) &= (n-m)(n+m-9) \\ &= [m(m-2)-2\delta-3\varkappa][(m^2-9)-2\delta-3\varkappa], \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} m &= n(n-1)-2\tau-3i \\ \varkappa &= 3n(n-2)-6\tau-8i \end{aligned}\right. \quad [\varkappa-i = 3(m-n)],$$
$$\left.\begin{aligned} 2(\delta-\tau) &= (m-n)(m+n-9) \\ &= [n(n-2)-2\tau-3i][(n^2-9)-2\tau-3i]. \end{aligned}\right.$$

Jacobi a démontré le premier que la *courbe bitangentielle,* courbe passant par les points de contact des tangentes doubles, est d'ordre $(m-2)(m^2-9)$; j'ai fait observer ailleurs (*Revue de Mathématiques spéciales,* août 1898), que la réduction de τ est intuitive si l'on écrit

$$\begin{aligned} \tau = \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)-2\delta(n-4)-3\varkappa(n-3) \\ -2^2\frac{\delta(\delta-1)}{2}-(2.3)\delta\varkappa-3^2\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}. \end{aligned}$$

3. Cayley a déduit de ces formules six formules relatives aux neuf nombres caractéristiques d'une courbe gauche ; deux seulement de ces formules nous seront utiles (encore pourrait-on n'en pas faire usage en se bornant à ce qui est essentiel).

Soient :

m, l'ordre d'une courbe gauche ;
h, le nombre de cordes qui passent par un point donné ;
β, le nombre de points cuspidaux (ou stationnaires);
n, la classe de la courbe, c'est-à-dire le nombre de plans osculateurs passant par un point donné;
h', le nombre de droites d'intersection de deux plans osculateurs qui sont dans un plan donné;

β', le nombre de plans surosculateurs (ou stationnaires);

r, le rang de la courbe, c'est-à-dire le nombre de tangentes qui rencontrent une droite donnée (nombre de plans tangents à la courbe qui passent par la droite);

ces notations sont celles de Salmon, sauf h' et β' qui sont en harmonie avec les notations ultérieures.

Lorsque la courbe est créée par ses plans osculateurs, on préfère ordinairement parler de la développable formée par les tangentes, chacun des deux systèmes de demi-tangentes formant une demi-nappe de la surface : la courbe est l'arête de rebroussement de cette développable, et les plans osculateurs de la courbe sont les plans tangents à la surface; les points situés sur les tangentes à la courbe sont les points de la surface, les plans qui passent par les tangentes (plans tangents à la courbe) sont comparables aux plans tangents à une surface réglée non développable. La notation r désigne à ce point de vue l'ordre de la développable, quantité qui est sa propre corrélative sur une surface réglée; n est le nombre des plans tangents que l'on peut mener par un point à la développable, et ce nombre est encore appelé la classe de la développable. Nous adopterons dans la suite cette façon d'envisager les choses pour une courbe qui se présente par ses plans osculateurs.

Si l'on considère le cône dont le sommet est un point quelconque et qui s'appuie sur la courbe, les formules de Plücker donnent pour la classe de ce cône

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta;$$

de même, si l'on considère une section plane de la développable, on a pour l'ordre de cette courbe

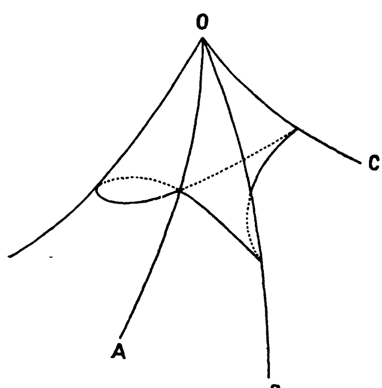
$$r = n(n-1) - 2h' - 3\beta'.$$

4. Voici, pour les surfaces, les éléments considérés par Salmon, avec les notations de l'auteur. On a d'abord les six quantités fondamentales :

n, ordre de la surface ;
b, ordre de la courbe nodale ;
c, ordre de la courbe cuspidale ;
t, nombre de points triples de la surface, points où se croisent trois nappes (ce sont des points triples de la courbe nodale) ;
γ, nombre de points où la courbe cuspidale avec ses deux demi-nappes est coupée par une autre nappe (ce sont des points de rebroussement de la courbe nodale) ;
β, nombre de points de rebroussement de la courbe cuspidale, séparant la branche de courbe nodale qui y passe en deux régions, l'une crunodale, l'autre acnodale [1] ;

---

[1] Si BOC est la courbe cuspidale avec rebroussement en O, si OA est la région crunodale de la courbe nodale, la forme de la surface dans le voisinage du point O est celle qu'indique la figure suivante :



et les six quantités corrélatives (en adoptant le point de vue indiqué au n° 3) :

n', classe de la surface;

b', classe de la développable qui est l'enveloppe des plans bitangents, ou nombre de plans bitangents que l'on peut mener par un point;

c', classe de la développable qui est l'enveloppe des plans stationnaires ou plans tangents aux points paraboliques, ou nombre de ces plans qui passent par un point donné (1);

t', nombre de plans tritangents;

γ', nombre de plans qui sont à la fois tangents en un point parabolique et en un autre point;

β', nombre de plans surosculateurs de la courbe à laquelle les plans tangents aux points paraboliques sont osculateurs.

5. Nous aurons à considérer les plans tangents le long de la courbe nodale, les plans tangents le long de la courbe cuspidale, et, corrélativement, les points de contact des plans bitangents, les points de contact des plans stationnaires ou points paraboliques. Je rappelle que les points paraboliques sont à l'intersection de la surface donnée U avec la hessienne H, et que les points de contact des plans bitangents sont à l'intersection de la surface U avec une surface K dont nous reparlerons; nous dirons : la courbe (U, H), la courbe (U, K). Voici les notations relatives à ces éléments :

ρ, classe de la développable qui est l'enveloppe des plans tangents le long de la courbe nodale, ou

(1) Le plan tangent en un point parabolique est stationnaire en prenant le point consécutif sur la tangente inflexionnelle.

nombre de ces plans qui passent par un point donné;

σ, classe de la développable qui est l'enveloppe des plans tangents le long de la courbe cuspidale, ou nombre de ces plans qui passent par un point donné;

ρ', ordre de la courbe qui est le lieu des points de contact des plans bitangents, courbe (U, K);

σ', ordre de la courbe qui est le lieu des points paraboliques, courbe (U, H).

On remarquera que ρ est le nombre des points d'intersection de la courbe nodale avec la courbe de contact des plans tangents menés par un point, ...

6. Les notations suivantes sont relatives aux tangentes, et non plus aux points ou aux plans tangents :

a, nombre de tangentes que l'on peut mener à la surface par un point donné, dans un plan donné;

δ, nombre de tangentes doubles issues d'un point;

$\varkappa$, nombre de tangentes inflexionnelles issues d'un point;

δ', nombre de tangentes doubles dans un plan;

$\varkappa'$, nombre de tangentes inflexionnelles dans un plan.

On remarquera que a est à la fois l'ordre du cône circonscrit et la classe de la section plane; le cône circonscrit a δ arêtes doubles et $\varkappa$ arêtes cuspidales, la section plane a δ' tangentes doubles et $\varkappa'$ tangentes d'inflexion. La courbe de contact des plans tangents issus d'un point est d'ordre a, et, corrélativement, la développable circonscrite à la surface le long d'une section plane est de classe a.

7. A la courbe nodale et à la courbe cuspidale se rattachent quatre quantités dont la considération n'est pas indispensable :

k, nombre de cordes de la courbe nodale qui passent par un point donné;
h, nombre de cordes de la courbe cuspidale qui passent par un point donné;
q, rang de la courbe nodale;
r, rang de la courbe cuspidale,

avec les formules

$$q = b(b-1) - 2k - 6t - 3\gamma,$$
$$r = c(c-1) - 2h - 3\beta,$$

dont la première s'obtient en mettant $k + 3t$ au lieu de k dans la formule de Cayley rappelée au n° 3; on a de même quatre quantités corrélatives :

k', nombre de droites d'intersection de deux plans bitangents qui sont dans un plan donné;
h', nombre de droites d'intersection de deux plans stationnaires qui sont dans un plan donné;
q', ordre de la développable qui est l'enveloppe des plans bitangents;
r', ordre de la développable qui est l'enveloppe des plans stationnaires ou plans tangents aux points paraboliques (les génératrices de cette développable sont les tangentes inflexionnelles de la surface aux points paraboliques),

avec les formules

$$q' = b'(b'-1) - 2k' - 6t' - 3\gamma',$$
$$r' = c'(c'-1) - 2h' - 3\beta'.$$

On remarquera les deux ensembles de notations :

Courbe nodale	b, ρ, k, q,
Courbe cuspidale	c, σ, h, r.

8. Problème. — *Étant données les six quantités*

$$n,\quad b,\quad c,\quad t,\quad \gamma,\quad \beta,$$

calculer les six quantités

$$n',\quad b',\quad c',\quad t',\quad \gamma',\quad \beta'.$$

Les quantités considérées dans ce qui précède étant au nombre de

$$12+8+4+5=29,$$

il suffira d'en donner 6 pour calculer toutes les autres, et en particulier les corrélatives des 6 premières, si ces 29 quantités sont liées par 23 relations distinctes. On a déjà écrit au n° 5 les formules qui donnent les expressions des quatre quantités q, r, q', r' en fonction des quantités b, c, ...; il faut donc encore 19 relations, soit $18+1$, en mettant à part celle de Cayley. Les 18 relations de Salmon forment 3 groupes de 6 relations, chaque groupe comprenant 3 relations ponctuelles et 3 relations tangentielles.

9. En premier lieu, *les formules de Plücker donnent* 6 *relations distinctes entre les valeurs des quantités* n, b, c, δ, $\varkappa$ *et* a, n', b', c', δ', $\varkappa'$. On a d'une part, en considérant une section plane de la surface, trois relations que nous utiliserons sous la forme qui suppose connus les éléments ponctuels :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} a &= n(n-1)-2b-3c \qquad\qquad [c-\varkappa'=3(n-a)],\\ \varkappa' &= 3n(n-2)-6b-8c\\ \delta' &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)-2b(a-4)-3c(a-3)-\ldots.\end{aligned}\right.$$

On a d'autre part, en considérant un cône circonscrit à la surface, trois relations dont la forme corrélative des précédentes serait celle qui exprimerait a, $\varkappa$, δ en fonction de n', b', c', mais que nous utiliserons sous la forme qui suppose connus les éléments ponctuels :

$$(\mathrm{I}')\quad \left\{\begin{aligned} n' &= a(a-1) - 2\delta - 3\varkappa \\ c' &= 3a(a-2) - 6\delta - 8\varkappa \qquad [c' - \varkappa = 3(n'-a)], \\ 2(b'-\delta) &= (n'-a)(n'+a-9) \\ &= [a(a-2) - 2\delta - 3\varkappa][(a^2-9) - 2\delta - 3\varkappa]. \end{aligned}\right.$$

Je signale en passant la formule

$$3n - c - \varkappa = 3n' - c' - \varkappa',$$

chacun des deux membres étant égal à $3a - \varkappa - \varkappa'$.

10. En second lieu, *la considération de la seconde polaire d'un point quelconque* (*courbe d'ordre* $n-2$) *donne les formules suivantes, dues à Salmon* (III, 169) :

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} \varkappa &= a(n-2) - (\rho + 2\sigma), \\ \rho &= b(n-2) - (3t + 3\gamma + 2\beta), \\ 2\sigma &= c(n-2) - (\gamma + 4\beta); \end{aligned}\right.$$

pour la première, par exemple, qui donne le nombre des tangentes inflexionnelles issues d'un point P, il faut défalquer du nombre des points d'intersection de la courbe de contact des tangentes issues de ce point avec la seconde polaire de ce point, soit $a(n-2)$, le nombre des points de rencontre B de cette courbe de contact avec la courbe nodale, soit ρ, et (deux fois) le nombre des points de rencontre C de cette courbe de contact avec la courbe cuspidale, soit σ; la seconde polaire du point considéré contient en effet les points B, puisqu'une droite PB rencontre la surface en trois points qui coïncident en B, ... La seconde et la troisième formule sont relatives à ces points B et C.

On a les formules corrélatives

$$
(\mathrm{A}') \quad \left\{ \begin{aligned} \varkappa' &= a(n'-2) - (\rho' + 2\sigma'), \\ \rho' &= b'(n'-2) - (3t' + 3\gamma' + 2\beta'), \\ 2\sigma' &= c'(n'-2) - (\gamma' + 4\beta'). \end{aligned} \right.
$$

11. En troisième lieu, *la considération d'une surface d'ordre* $(n-2)(n-3)$ *passant par les points de contact des tangentes doubles issues d'un point donne les formules suivantes, également dues à Salmon* (III, 175) :

$$
\begin{aligned} 2\delta &= a(n-2)(n-3) - 2(ab - 2\rho) - 3(ac - 3\sigma), \\ 4k &= b(n-2)(n-3) - (ab - 2\rho) - 3(bc - 2\gamma - 3\beta), \\ 6h &= c(n-2)(n-3) - (ac - 3\sigma) - 2(bc - 2\gamma - 3\beta); \end{aligned}
$$

la différence $ab - 2\rho$ représente le nombre des intersections apparentes de la courbe de contact des tangentes issues d'un point et de la courbe nodale, ...

On peut écrire :

$$
(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\delta &= a[(n-2)(n-3) - 2b - 3c] + 4\rho + 9\sigma, \\ 4k &= b[(n-2)(n-3) - a - 3c] + 2\rho + 6\gamma + 9\beta, \\ 6h &= c\,[(n-2)(n-3) - a - 2b] + 3\sigma - 4\gamma + 6\beta. \end{aligned} \right.
$$

On a de même

$$
(\mathrm{B}') \quad \left\{ \begin{aligned} 2\delta' &= a[(n'-2)(n'-3) - 2b' - 3c'] + 4\rho' + 9\sigma', \\ 4k' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6h' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.
$$

12. Salmon transforme les formules (B) en ajoutant à chacune d'elles la formule correspondante (A) multipliée par 4; le coefficient de a, b, ou c au second membre de la nouvelle formule commence alors par le terme $(n-2)(n+1)$, ou $n(n-1)-2$, et ce coefficient prend une forme très simple en tenant compte de la relation

$$a+2b+3c=n(n-1);$$

on a ainsi

$$(\mathrm{B}_1)\quad \left\{\begin{aligned} 2\delta+4\varkappa &= a^2-2a+\sigma,\\ 4k &= 2b^2-2b-2\rho-12t-6\gamma+\beta,\\ 6h &= 3c^2-2c-5\sigma-10\beta; \end{aligned}\right.$$

on a de même

$$(\mathrm{B}'_1)\quad \left\{\begin{aligned} 2\delta'+4\varkappa' &= a^2-2a+\sigma',\\ 4k' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\\ 6h' &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En combinant les relations (B_1) avec les relations

$$\begin{aligned} n' &= a^2-a-2\delta-3\varkappa,\\ 2q &= 2b^2-2b-4k-12t-6\gamma,\\ 3r &= 3c^2-3c-6h-9\beta, \end{aligned}$$

on obtient de nouvelles relations qui peuvent remplacer les unes ou les autres :

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{aligned} n'-a &= \varkappa-\sigma,\\ 2q &= 2\rho-\beta,\\ 3r+c &= 5\sigma+\beta; \end{aligned}\right.$$

on a de même

$$(\mathrm{F}')\quad \left\{\begin{aligned} n-a &= \varkappa'-\sigma',\\ 2q' &= 2\rho'-\beta',\\ 3r'+c' &= 5\sigma'+\beta'; \end{aligned}\right.$$

on peut remarquer la formule

$$n+\varkappa-\sigma=n'+\varkappa'-\sigma',$$

chacun des deux membres étant égal à $n+n'-a$.

Les six formules (F) et (F′) remplaceront pour nous les quatre formules du n° 7, la première formule (I′) et la première formule (B'_1). Ce qui reste à dire sur ces formules sera mieux à sa place un peu plus loin.

13. Voici enfin la formule de Cayley (III, 191, 192, 138) :

$$(G)\qquad 26n - 12c + \beta = 26n' - 12c' + \beta'.$$

14. Revenons au problème du n° 8, pour lequel on suppose donnés n, b, c, t, γ, β.

Observons d'abord que les huit quantités k, h, q, r, k', ... figurent seulement dans huit relations, que l'on peut mettre à part et qui feront connaître ces huit quantités quand on aura déterminé les autres : ces huit relations sont les deux dernières relations de chacun des groupes (B_1) et (B'_1), et les deux dernières relations de chacun des groupes (F) et (F′).

De cette façon, on a seulement six inconnues principales

$$n',\quad b',\quad c',\quad t',\quad \gamma',\quad \beta',$$

et neuf inconnues auxiliaires

$$a \left\{ \begin{array}{llll} \rho, & \sigma, & \varkappa, & \delta, \\ \rho', & \sigma', & \varkappa', & \delta'; \end{array} \right.$$

liées par quinze relations qui sont :

les six relations (I) et (I′),
les six relations (A) et (A′),
la première relation de chacun des groupes (B_1) et (B'_1),
la relation de Cayley;

toutefois, comme il a été dit, nous remplacerons la première des relations (I′) par la première formule (F), et la première des relations (B'_1) par la première formule (F').

15. Les relations (I) donnent a, $\varkappa'$, δ' :

(1) $$a = n(n-1) - 2b - 3c,$$

(2) $$\varkappa' = 3n(n-2) - 6b - 8c,$$

(3) $$\delta' = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - 2b(a-4) - 3c(a-3) - \ldots.$$

Les relations (A) donnent ρ, σ, k :

(4) $$\rho = b(n-2) - (3t + 3\gamma + 2\beta),$$

(5) $$2\sigma = c(n-2) - (\gamma + 4\beta),$$

(6) $$\varkappa = a(n-2) - (\rho + 2\sigma) = \ldots.$$

La première relation (B) donne δ :

(7) $$2\delta = a[(n-2)(n-3) - 2b - 3c] + 4\rho + 9\sigma = \ldots.$$

16. Les relations (I′) donnent n', c', b'. Pour le calcul de n', il vaut mieux employer la première des formules (F); on a ainsi

$$n' - a = \varkappa - \sigma = a(n-2) - (\rho + 3\sigma),$$

ou

(8) $$n' = a(n-1) - (\rho + 3\sigma) = \ldots.$$

Cette formule importante pourrait être établie directement, comme le remarque Salmon : en effet, pour avoir les points de contact des plans tangents à une surface menée par une droite, on peut couper la courbe de contact relative à un premier point de la droite par la première polaire d'un autre point de cette droite, sauf à écarter les points en nombre ρ où la courbe de contact est rencontrée par la courbe nodale, et (trois fois) les points en nombre σ où elle est rencontrée par la courbe cuspidale, puisqu'une première polaire quelconque passe par ces deux courbes.

La valeur de c' est donnée par la formule

$$c' - \varkappa = 3(n' - a);$$

à cause de

$$\varkappa = a(n-2) - (\rho + 2\sigma),$$
$$n' - a = a(n-2) - (\rho + 3\sigma),$$

on a donc

$$(9) \qquad c' = a \times \overline{4(n-2)} - (4\rho + 11\sigma) = \ldots;$$

on aurait pu écrire

$$c' = \varkappa + 3(n' - a) = 4\varkappa - 3\sigma = \ldots;$$

le premier terme de la formule (9) *s'explique par le fait que les points paraboliques sont sur la hessienne* H *qui est d'ordre* $4(n-2)$.

On obtient b' par la dernière des formules (I'). On a d'abord

$$2\delta + 3\varkappa = a[n(n-2) - 2b - 3c] + \rho + 3\sigma;$$

on a donc

$$2b' = 2\delta + \left[a(a - 2 - n(n-2) + 2b + 3c) - \rho - 3\sigma\right]$$
$$\times \left[a\big(a - n(n-2) + 2b + 3c\big) - 9 - \rho - 3\sigma\right],$$

ou, à cause de

$$a + 2b + 3c = n(n-1),$$
$$2b' = a[(n-2)(n-3) - 2b - 3c] + 4\rho + 9\sigma$$
$$+ [a(n-2) - \rho - 3\sigma][an - 9 - \rho - 3\sigma],$$

ou enfin

$$(10) \qquad 2b' = a \times \overline{(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)} - \ldots;$$

le premier terme de cette formule s'explique par le fait que les points de contact des plans bitangents sont sur une surface K *d'ordre*

$$(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12).$$

17. La première formule (F′), substituée à la première formule (B'_1), donne σ'. En la rapprochant de celle qui donne $\varkappa'$, on a

$$n - a = \varkappa' - \sigma',$$
$$3(n - a) = c - \varkappa',$$

et, par suite,

$$4(n - a) = c - \sigma',$$

ce qui donne

$$(11) \qquad \sigma' = n \times \overline{4(n - 2)} - 8b - 11c;$$

le premier terme s'explique par le fait que la hessienne H *contient les points paraboliques.*

La première des relations (A′) donne ρ'; dans le terme qui subsiste seul en l'absence de singularités ponctuelles, $(n - 2)$ se met en facteur à cause de

$$(n' - 2) = (n - 2)(n^2 + 1) + \ldots,$$

et l'on a

$$(12) \qquad \rho' = n \times \overline{(n - 2)(n^3 - n^2 + n - 12)} + \ldots;$$

le premier terme s'explique par le fait que les points de contact des plans bitangents appartiennent à la surface K *dont il est question ci-dessus.*

18. La relation de Cayley donne

$$(13) \qquad 2\beta' = n \times \overline{4(n - 2)} \times (11n - 24) - \ldots.$$

Voici comment Salmon rend compte du premier terme de cette expression (III, 167). En un point quelconque, la section de la surface donnée U par le plan tangent offre un point double dont les deux tangentes sont les tangentes inflexionnelles en ce point; il peut arriver que l'une de ces tangentes soit une tangente d'inflexion pour la section, et le lieu des points pour lesquels il en est ainsi, la courbe *flecnodale,* est l'intersection de la surface par une surface S de degré $11n-24$; on arrive à ce résultat en cherchant les droites qui rencontrent la surface en quatre points consécutifs (III, 140).

En un point d'intersection de la courbe (U, H) qui est le lieu des points paraboliques avec la surface S ou avec la courbe flecnodale, la direction de la tangente à la courbe (U, H) est la même que celle de la tangente inflexionnelle, et les plans tangents en deux points consécutifs de la courbe (U, H) sont, par suite, les mêmes.

Il semble donc que l'on doit avoir

$$\beta' = n \times \overline{4(n-2)} \times (11n-24) - \ldots;$$

mais la surface S est tangente à la hessienne, de sorte que la courbe (U, H) est tangente à la surface S, et l'on a réellement

$$\beta' = \tfrac{1}{2} n \times \overline{4(n-2)} \times (11n-24) - \ldots.$$

Voir encore Salmon, III, 160.

19. Les deux dernières relations (A') donnent enfin

$$(14)\quad \gamma' = n \times \overline{4(n-2)} \times \overline{(n-3)(n^3+3n-16)} - \ldots,$$

$$(15)\quad 6t' = n(n-2)(n^7-\ldots) - \ldots.$$

Le premier terme de la relation (14) appellerait une explication analogue à celle qui concerne β', au moyen d'une surface dont le degré serait

$$(n-3)(n^3+3n-16).$$

Les formules (13) et (15) donnent

$$\gamma' + 2\beta' = n \times \overline{4(n-2)} \times \overline{(n-2)(n^3-n^2+n-12)} - \ldots$$

Salmon rend compte du premier terme de cette formule (III, 173), *en considérant les points communs aux trois surfaces* U, H, K, ou encore les points communs à la courbe parabolique (U, H) et à la courbe (U, K) qui est le lieu des points de contact des plans bitangents.

20. Au moyen des formules

$$\rho = b(n-2) - 3t - 3\gamma - 2\beta,$$
$$\sigma = \frac{cn-\gamma}{2} - c - 2\beta,$$

on a

$$k = \frac{b(b+1)}{2} - \frac{bn+3t-5\frac{\beta}{2}}{2},$$
$$h = \frac{c(c-1)}{2} - 5\frac{cn-\gamma}{12},$$
$$q = \rho - \frac{\beta}{2} = \ldots,$$
$$r = \frac{5\sigma+\beta-c}{3} = 5\frac{cn-\gamma}{6} - 2c - 3\beta$$

On a encore

$$q' = n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4) - \ldots,$$
$$2r' = n \times \overline{4(n-2)} \times (3n-4) - \ldots;$$

le premier terme de cette dernière expression peut être obtenu directement (III, 123).

21. Les valeurs obtenues pour les nombres caractéristiques doivent être entières, et il en résulte certaines conditions pour les données.

La formule (5) montre que $cn-\gamma$ doit être pair; la formule (7) exige qu'il soit multiple de 4.

La condition pour que t' soit entier est réalisée d'elle-même; on doit écrire que la quantité

$$b'(n'+1)-\rho'+\beta'$$

est divisible par 3 ; en tenant compte de ce que n^3 est congru à n relativement au module 3, on arrive à l'expression $(b^3-b)-(\beta^3-\beta)$, qui doit être et qui est divisible par 3.

D'après (F) et (F'), q et q' sont entiers si β et β' sont pairs, c'est-à-dire, en tenant compte de la formule de Cayley, si β est pair. La condition pour que r et r' soient entiers est que $cn-\gamma$ soit multiple de 3; d'après ce qu'on a déjà vu, il doit donc être multiple de 12.

D'après les formules du n° 7, h et h' sont entiers si r et r' sont pairs, ce qui a lieu en vertu des conditions déjà obtenues. Cette parité se ramène, en effet, à celle des différences $\sigma-c$, $\sigma'-c'$, parités qui se ramènent l'une à l'autre, et la formule

$$2\sigma-2c=c(n-4)-(\gamma+4\beta)$$

montre que $2\sigma-2c$ est multiple de 4 en même temps que $cn-\gamma$.

La valeur de k est un nombre entier si la différence $q-\gamma$ est paire, ce qui exige que $bn-t-\frac{\beta}{2}$ soit un nombre pair. Cette même condition donne d'ailleurs k' entier, comme on s'en assure en considérant la différence $k'-k$.

On a donc ainsi les conditions

$$\begin{aligned} cn-\gamma &= \text{mult. de } 12,\\ \beta &= \text{mult. de } 2,\\ bn-t-\frac{\beta}{2} &= \text{mult. de } 2. \end{aligned}$$

22. L'expression du genre donnée par Cayley est (III, 138)

$$D = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)(b+c) + \tfrac{1}{2}(q+r) + 2t + \tfrac{5}{2}\gamma + \tfrac{7}{2}\beta;$$

on peut écrire

$$12D = 2(n-1)(n-2)(n-3) - 6(b+c)(n-4) - cn + 6t + 7\gamma + 9\beta.$$

On lit dans l'Ouvrage de Salmon (III, 191) : « La formule (13), due à Cayley, est la forme correcte de l'expression de β', déduite d'abord par lui (avec quelques erreurs dans les coefficients numériques) de considérations différentes, mais qui résulte plus facilement de la relation obtenue en égalant l'expression ponctuelle du genre à son expression tangentielle; et la formule

$$26n - 12c + \beta = 26n' - 12c' + \beta'$$

est une relation qui se présente d'elle-même dans cette recherche. »

Il n'y a pas à se préoccuper ici du fait que le *genre numérique* d'une surface, c'est-à-dire le nombre que donne la formule de Cayley, peut être inférieur à son *genre géométrique*, Zeuthen ayant montré que le genre numérique est, comme le genre géométrique, un invariant pour toute transformation birationnelle. Je renverrai sur ce point à la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, de MM. E. Picard et G. Simart.

Note. — Je retrouve au dernier moment, dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1864, un article intéressant de E. de Jonquières relatif aux singularités tangentielles des surfaces algébriques qui n'ont pas de singularités ponctuelles. Je regrette de n'avoir pu en tirer parti.