Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 476-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__476_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2064.

(1907 p. 95)

Un point C *se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre point, situé originairement au centre* O *du cercle, se meut avec la même vitesse que le point* C *sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point. Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque* M *de cette courbe est égal au segment intercepté sur le rayon* OC *par la normale en* M.

(D^r W. Kapteyn.)

NOTE

Cette question est résolue dans une lettre de M. d'Ocagne, dont un extrait a été inséré à la page 173 du présent Volume.

2068

(1907, p. 96.)

Quand le centre de gravité d'un tétraèdre se confond avec celui des six arêtes ou bien avec le centre de gravité de la surface, les arêtes opposées du tétraèdre sont deux à deux égales.

D^r J. Schuh.

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Les segments qui unissent les points milieux des arêtes opposées, étant bissectés par le barycentre du tétraèdre, il s'ensuit que, si les arêtes opposées sont deux à deux égales, le barycentre du tétraèdre coïncide avec celui des arêtes et dans le cas contraire les deux barycentres sont deux points distincts.

Lorsque les arêtes opposées sont deux à deux égales les quatre faces sont égales et réciproquement; il suffit donc de démontrer que, si les barycentres du tétraèdre et de sa surface coïncident, les faces sont égales : or, si les faces du tétraèdre sont égales, le barycentre de sa surface coïncide avec le barycentre des barycentres des faces et par suite avec celui du tétraèdre.

Si au contraire les faces ne sont pas égales, le barycentre du tétraèdre est différent du barycentre des barycentres des faces, c'est-à-dire les centres de gravité du tétraèdre et celui de sa surface sont deux points distincts.

2071.

(1907, p. 96.)

Le tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées tétraédriques (a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, d, a, b), (d, a, b, c) *est, de quatre manières différentes, en relations hyperboloïdiques avec le tétraèdre de référence.*

(D[r] P. Zeeman Gz.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

Soient ABCD le tétraèdre de référence; $(x, y, z, t)_{1,2,3,4}$ les coordonnées de quatre points quelconques A′, B′, C′, D′.

Il est extrêmement facile de voir que les conditions qui expriment que les droites AA′, BB′, CC′, DD′ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde sont :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} t_2\, y_3 z_4 &= z_2\, t_3\, y_4, \\ t_3\, x_4 z_1 &= x_3 z_4\, t_1, \\ y_4 t_1\, x_2 &= x_4 y_1\, t_2, \\ y_1 z_2 x_3 &= z_1\, x_2 y_3. \end{aligned}\right.$$

Ainsi que cela doit être, l'une quelconque de ces conditions est une conséquence des trois autres.

Mais il est clair que, sans nuire à la généralité, on peut poser :

$$y_1 = x_2 = n, \qquad z_2 = y_3 = l, \qquad t_3 = z_4 = r;$$

les conditions (1) donnent alors :

$$t_2 = y_4 = q, \qquad x_3 = z_1 = m, \qquad x_4 = t_1 = p,$$

et l'on a, pour l'expression la plus générale des coordonnées des sommets A′, B′, C′, D′ d'un tétraèdre en relation hyperboloïdique avec le tétraèdre de référence,

$$\begin{array}{cccc} x_1, & n, & m, & p; \\ n, & y_2, & l, & q; \\ m, & l, & z_3, & r; \\ p, & q, & r, & t_4; \end{array}$$

et l'on voit qu'elles forment un Tableau symétrique par rapport à la diagonale $x_1 y_2 z_3 t_4$.

Or on peut former, avec les coordonnées de l'énoncé, quatre tableaux semblables, savoir :

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d; \\ b, & c, & d, & a; \\ c, & d, & a, & b; \\ d, & a, & b, & c; \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} b, & c, & d, & a; \\ c, & d, & a, & b; \\ d, & a, & b, & c; \\ a, & b, & c, & d; \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} c, & d, & a, & b; \\ d, & a, & b, & c; \\ a, & b, & c, & d; \\ b, & c, & d, & a; \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} d, & a, & b, & c; \\ a, & b, & c, & d; \\ b, & c, & d, & a; \\ c, & d, & a, & b; \end{array}$$

ce qui démontre la proposition.

Autre solution par M. RETALI.

2072.

(1907, p. 144.)

Construire un quadrilatère, connaissant les centres de gravité des quatre triangles formés par trois sommets du quadrilatère. (Dr J. DE VRIES.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Soient ABCD le quadrilatère cherché et A_1, B_1, C_1, D_1 les centres de gravité des triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Le point A_1 étant le centre des moyennes distances de B, C et D, la droite AA_1 passe par le centre O des quatre points A, B, C, D, et l'on a : $\overline{OA} = -3\overline{OA_1}$; il en est de même des droites BB_1, CC_1, DD_1. Donc ABCD est homothétique à $A_1B_1C_1D_1$, O étant le centre d'homothétie et -3 le rapport d'homothétie. Comme le point O est aussi le centre des moyennes distances des quatre points A_1, B_1, C_1, D_1, on en déduit la solution de la question.

Autres solutions par MM. Droz-Farny, Kreis, Maes, Parrod, Tétu.

2073.

(1907, p. 144.)

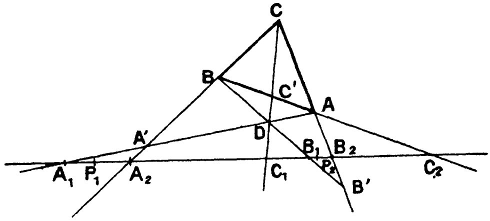
On donne dans le plan d'un triangle ABC *deux points* P_1 *et* P_2. *Sur* BC *on détermine un point* A' *tel que* $A'P_1$ *et* $A'P_2$ *soient conjuguées harmoniques par rapport à* A'A *et* BC. *On détermine d'une façon analogue les points* B' *et* C' *sur* CA *et sur* AB. *Démontrer que les droites* AA', BB', CC' *sont concourantes.* (Dr J. de Vries.)

PREMIÈRE SOLUTION
Par M. Letierce.

Si l'on transforme homographiquement la figure de façon que les points P_1 et P_2 deviennent les points cycliques, les droites AA', BB' et CC' sont les hauteurs du nouveau triangle, ce qui démontre la proposition.

DEUXIÈME SOLUTION
Par M. H. Kreis.

Soit A' un point situé sur le côté BC jouissant de la propriété énoncée. En coupant les quatre rayons harmoniques



$A'P_1$, $A'P_2$, A'A, A'C par la transversale P_1P_2 on obtient un groupe de points P_1, P_2, A_1, A_2 tels que A_1 est conjugué harmonique de A_2 par rapport aux points donnés $P_1 P_2$. Le point A_1 est donc unique et il n'y a par suite qu'un point A' sur le côté BC qui satisfasse au problème. Pour construire les points B' et C' on aurait pareillement à déterminer les points d'intersection B_2 et C_2 des côtés AC et AB avec la transversale $P_1 P_2$, puis leurs conjugués harmoniques B_1 et C_1 par rapport à $P_1 P_2$. BB_1 coupe AC en B' et CC_1 coupe AB en C'. De ce qui précède résulte que les six points A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 appartiennent à une involution.

Désignons par D le point d'intersection des droites AA' et BB'; on sait alors, en vertu du théorème de Desargues, que, si les cinq côtés AD, BC; BD, CA; AB du quadrangle complet ABCD passent par les cinq points A_1, A_2; B_1, B_2; C_2 de l'involution ci-dessus, le sixième côté CD passera nécessairement par le sixième point C_1. Donc CC' passe par le point D.

Autres solutions par MM. Droz-Farny, Maes, Parrod.