Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 523-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__523_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Considérant la surface ayant pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$z = y \sin x,$$

1° *Déterminer les lignes asymptotiques* γ (*autres que les génératrices rectilignes*) *et montrer qu'elles coupent orthogonalement la génératrice* Oy.

2° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* γ.

3° *En un point* M *de* Oy *passe une courbe* γ. *Déterminer le centre de courbure, le rayon de courbure* R *et la droite polaire* Δ *de* γ *au point* M.

4° *Variation de* R *quand* M *décrit* Oy.

5° *Lignes asymptotiques de la surface décrite par* Δ *quand* M *décrit* Oy.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale double*

$$\iint \frac{dx\,dy}{+\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

étendue à l'aire du triangle limité par les trois droites

$$\begin{gathered} x = 1, \\ y = 0, \\ x - y - a = 0 \\ (0 < a < 1). \end{gathered}$$

Valeur limite pour $a = 0$. (Juin 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégration des équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants.*

II. *Déterminer une surface* S *vérifiant l'équation aux dérivées partielles*

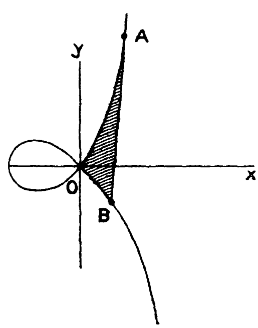
$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

et passant par la courbe

$$\begin{gathered} x = y, \\ z = x^3. \end{gathered}$$

Chercher les lignes asymptotiques de cette surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe unicursale*



$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2},$$

et, sur elle, deux points A *et* B *correspondant aux*

$$t_1 = \text{tang}\,\alpha, \qquad t_2 = \text{tang}\,\beta,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Déterminer l'aire du triangle curviligne AOB.

(Novembre 1907.)

Dijon.

Première question. — *On considère, en coordonnées rectangulaires, le cylindre d'équation $y = x^n$, où n est une constante donnée. Trouver une courbe située sur ce cylindre, et telle que le plan osculateur en chaque point* M *de cette courbe passe par la projection orthogonale* P *de* M *sur l'axe* O*y*.

C *étant une courbe possédant cette propriété, on considère la surface engendrée par la droite* MP *quand* M *décrit* C. *Trouver les lignes asymptotiques de cette surface.*

Deuxième question. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}(x)(y^2 - x^2) = 1 = 0,$$

où P(*x*) *est une fonction donnée de x.*

Chercher quelles conditions doit remplir P *pour que l'équation n'admette en y que des solutions qui soient fonctions rationnelles de x.* (Juillet 1907.)

I. *Exposer la théorie des lignes géodésiques d'une surface, en se bornant à la définition de ces lignes par la propriété du plan osculateur, et laissant de côté ce qui concerne les questions de minimum de distance.*

II. *Former l'équation différentielle de lignes géodésiques et l'hélicoïde engendré par une droite qui rencontre constamment une hélice circulaire donnée ainsi que son axe, et qui reste perpendiculaire à cet axe.*

Montrer qu'on peut intégrer cette équation par les fonctions elliptiques. (Novembre 1907.)

Grenoble.

Composition. — *Une surface* S *est définie par les équations*

$$(1) \qquad x = -\frac{1}{u'_\alpha}, \qquad y = \beta x, \qquad z = \alpha + ux,$$

dans lesquelles u *est une fonction donnée des deux paramètres arbitraires* α, β. *On demande :* 1° *les équations du plan tangent et de la normale en un point de* S; 2° *l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface.*

On remarquera : 3° *que les courbes coordonnées*

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}$$

sont conjuguées, et l'on montrera : 4° *que la développable circonscrite à* S, *le long d'une courbe* $\alpha = \text{const.}$, *est un cône dont le sommet est sur* Oz; *et* 5° *que dans le cas où la fonction* u *est donnée de la forme* $u = AB + \alpha B_1 + B_2$, A *ne dépendant que de* α, *et* B, B_1, B_2 *seulement de* β, *la développable circonscrite à une courbe* $\beta = \text{const.}$ *est aussi un cône.*

Enfin 6° *on fera voir que, dans le cas où les fonctions* B_1 *et* B_2 *sont linéaires, la détermination des lignes asymptotiques ne dépend que de simples quadratures.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$(px + qy - z)^2(x^2 + y^2) - 2(px + qy - z) - p^2 - q^2 = 0.$$

(Novembre 1907.)

Nancy.

Epreuve écrite. — I. *On considère la fonction* $f(u)$, *où l'on a posé, pour abréger,* $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; *on demande :*

1° *De calculer en fonction de* u *l'expression*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

2° *D'évaluer l'intégrale triple*

$$\int\int\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz$$

étendue au volume compris entre deux sphères ayant pour centre l'origine et pour rayons a et b :

3° *De déterminer la fonction $f(u)$ de façon qu'elle satisfasse à l'équation*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

II. *Définition et détermination du plan osculateur.*

III. *Par chaque point* M *de la courbe représentée par les équations*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3,$$

on trace la droite D *parallèle au plan xOy et rencontrant l'axe* O*z. Montrer que cette droite est contenue dans le plan osculateur de la courbe au point* M. *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface lieu de la droite* D.

(Octobre 1907.)