NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE COTTON

À propos des équations de M. Appell

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 529-539

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__529_0>

[R8e]

A PROPOS DES ÉQUATIONS DE M. APPELL;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les pages suivantes contiennent deux remarques relatives : 1° au calcul de l'énergie d'accélération d'un système; 2° à la détermination des réactions correspondant à l'addition de nouvelles liaisons dans un système gêné, quand il n'y a pas frottement.

1. Considérons un système matériel dont la position est caractérisée par les valeurs de $k+s$ paramètres $q_1, \ldots, q_{k+s}$. Supposons de plus ces paramètres liés par les s équations

$$(1)\quad dq_{k+i} = \alpha_{i1}\,dq_1 + \ldots + \alpha_{ik}\,dq_k + \alpha_i\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

auxquelles nous conserverons la forme différentielle sans rechercher si elles peuvent, en totatité ou en partie, être remplacées par des relations finies.

Le système a un degré de liberté égal à k; écrivons les équations du mouvement, autres que (1),

$$(2)\qquad P_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, k),$$

en admettant que

$$(3)\qquad Q_1\,\delta q_1 + \ldots + Q_k\,\delta q_k$$

représente le travail virtuel des forces agissant sur le système, pour un déplacement infiniment petit caractérisé par $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k, \ldots, \delta q_{k+s}$, où

$$\delta q_{k+i} = \alpha_{i1}\,\delta q_1 + \ldots + \alpha_{ik}\,\delta q_k.$$

Si les liaisons sont sans frottement, les forces de liaison disparaissent dans l'expression (3).

L'expression

$$(4) \qquad P_1 \delta q_1 + \ldots + P_k \delta q_k$$

représente alors le travail virtuel changé de signe des forces d'inertie qui correspondent à un mouvement quelconque compatible avec les liaisons.

Cette interprétation des premiers membres des équations du mouvement rend intuitive l'importance des équations de la Mécanique analytique pour les problèmes de Mécanique appliquée, où les forces d'inertie ont souvent la même importance que les autres. A un autre point de vue, elle met en évidence le caractère invariant de l'expression (4).

2. M. Appell (¹) a montré que les expressions P_1, P_2, ..., P_k peuvent s'obtenir à l'aide de l'énergie d'accélération $2S$ du système exprimée au moyen des dérivées secondes des paramètres à variations indépendantes $q''_1, q''_2, \ldots, q''_k$. On a

$$(5) \qquad P_1 = \frac{\partial S}{\partial q''_1}, \qquad \ldots, \qquad P_k = \frac{\partial S}{\partial q''_k}.$$

Or, S est une fonction du second degré de ces dérivées, et nous pouvons écrire

$$S = S_2 + S_1 + S_0,$$

S_2, S_1, S_0 désignant respectivement l'ensemble des termes de degré 2, 1, 0 par rapport à $q''_1, \ldots, q''_k$. Le

(¹) *Voir* le Tome II de la deuxième édition de son *Traité de Mécanique rationnelle*, pour la bibliographie.

calcul de S_0 est inutile pour la formation des équations de M. Appell.

On a, d'après le théorème d'Euler,

$$q''_1 P_1 + \ldots + q''_k P_k = 2 S_2 + S_1, \tag{6}$$

de sorte que, *si par un procédé quelconque on a obtenu les équations du mouvement sous la forme expliquée au n° 1*, il sera facile de calculer la partie utile de l'énergie d'accélération : *on calcule l'expression $q''_1 P_1 + \ldots + q''_k P_k$, on double les termes du premier degré par rapport aux q'' dans le résultat obtenu et l'on supprime les termes indépendants.*

3. Par exemple, dans le cas d'un solide mobile autour d'un point fixe, rapporté à ses axes principaux d'inertie, en adoptant les notations classiques, les équations d'Euler

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = L,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = M,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N,$$

donnent, en prenant des paramètres λ, μ, ν définis par les équations différentielles

$$\lambda' = p, \qquad \mu' = q, \qquad \nu' = r,$$

et observant que $L \delta\lambda + M \delta\mu + N \delta\nu$ représente bien le travail virtuel des forces agissant sur le solide,

$$\begin{aligned} 2S = A\lambda''^2 + 2(C - B)\mu'\nu'\lambda'' + B\mu''^2 + 2(A - C)\nu'\lambda'\mu'' \\ + C\nu''^2 + 2(B - A)\nu'\mu'\lambda'' + \ldots, \end{aligned}$$

es termes non écrits étant inutiles.

4. Plus généralement, considérons un solide Σ rapporté à des axes $Gxyz$ passant par son centre de gravité, mobiles à la fois par rapport à Σ et par rapport à l'espace fixe [1].

Soient P, Q, R les projections de la rotation instantanée du trièdre $Gxyz$; p, q, r celles de la rotation du solide; u, v, w celles de la vitesse de G. Appelons M la masse du solide, A, B, C, D, E, F ses moments et produits d'inertie relatifs aux axes (ces dernières quantités peuvent varier avec le temps), et enfin $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ les coordonnées pluckériennes du dyname agissant sur Σ.

Les équations générales du mouvement sont celles du mouvement du centre de gravité

$$(7)\qquad \begin{cases} M(u' + Qw - Rv) = \mathcal{X}, \\ M(v' + Ru - Pw) = \mathcal{Y}, \\ M(w' + Pv - Qu) = \mathcal{Z}, \end{cases}$$

et en posant

$$2T_r = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq,$$
$$\sigma_x = \frac{\partial T_r}{\partial p}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial T_r}{\partial q}, \qquad \sigma_z = \frac{\partial T_r}{\partial r},$$

celles du mouvement autour du centre de gravité

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\sigma_x}{dt} + Q\sigma_z - R\sigma_y = \mathcal{L}, \\[2mm] \dfrac{d\sigma_y}{dt} + R\sigma_x - P\sigma_z = \mathcal{M}, \\[2mm] \dfrac{d\sigma_z}{dt} + P\sigma_y - Q\sigma_x = \mathcal{N}. \end{cases}$$

Prenons des paramètres définis par

$$dq_1 = u\,dt, \qquad dq_2 = v\,dt, \qquad \ldots, \qquad dq_6 = r\,dt,$$

---

[1] On ramène aisément le cas d'axes quelconques au cas examiné dans le texte.

et écrivons $u\delta t, \ldots, r\delta t$ à la place de $\delta q_1, \ldots, \delta q_6$, puis $u', \ldots, r', u, \ldots, r$, à la place de $q''_1, \ldots, q''_6$, $q'_1, \ldots, q'_6$. Le travail virtuel du dyname agissant sur le solide est

$$(u\mathcal{X} + v\mathcal{Y} + w\mathcal{Z} + p\mathcal{L} + q\mathcal{M} + r\mathcal{N})\delta t,$$

et les termes utiles de l'énergie d'accélération $2S$ sont donnés en multipliant par 2 les termes utiles de

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} S = {} & M[u'(u' + Qw - Rv) + v'(v' + Ru - Pw) \\ & \qquad + w'(w' + Pv - Qu)] \\ & + p'\left(\frac{d\sigma_x}{dt} + Q\sigma_z - R\sigma_y\right) + q'\left(\frac{d\sigma_y}{dt} + R\sigma_x - P\sigma_z\right) \\ & \qquad + r'\left(\frac{d\sigma_z}{dt} + P\sigma_y - Q\sigma_x\right) \\ & - \tfrac{1}{2}[M(u'^2 + v'^2 + w'^2) + Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 \\ & \qquad - 2Dq'r' - 2Er'p' - 2Fp'q'] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En définitive, nous trouvons l'énergie d'accélération pour un solide libre en utilisant les équations générales de son mouvement. Le résultat trouvé servira à écrire les équations du mouvement d'un solide gêné en évitant l'élimination des forces de liaison, élimination dont on ne peut se dispenser si l'on emploie exclusivement les équations générales. De plus, on peut, dans le cas d'un solide, déterminer le dyname des forces de liaison, s'il n'y a pas frottement en dirigeant convenablement l'emploi des méthodes de Lagrange ou de M. Appell. C'est ce qui va résulter d'une proposition plus générale que nous allons établir.

5. Considérons un système matériel sans frottement Σ_{k+s} dont le degré de liberté soit $k+s$; soient q_1, $q_2, \ldots, q_{k+s}$ les paramètres à variations indépendantes.

Soit $2S$ l'énergie d'accélération. Écrivons les équations du mouvement

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q''_1} = Q_1, & \ldots, & \dfrac{\partial S}{\partial q''_k} = Q_k, \\ \dfrac{\partial S}{\partial q''_{k+1}} = Q_{k+1}, & \ldots, & \dfrac{\partial S}{\partial q''_{k+s}} = Q_{k+s}. \end{cases}$$

Sans changer les forces données, ajoutons de nouvelles liaisons sans frottement, que nous supposons traduites par s équations que nous prenons sous forme différentielle (peu importe que ces liaisons soient ou ne soient pas exprimables en termes finis). Soit Σ_k le système obtenu. La méthode de M. Appell permettant de faire un changement des variables q, telles que les nouvelles variables soient liées aux anciennes par des équations aux différentielles totales ne formant pas nécessairement un système complètement intégrable, nous pouvons supposer qu'un tel changement de variables a été fait de façon que les s équations des liaisons nouvelles soient précisément

$$(11)\qquad dq_{k+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad dq_{k+s} = 0.$$

Les paramètres indépendants sont maintenant q_1, q_2, ..., q_k. L'énergie d'accélération $2\overline{S}$ du nouveau système se déduit de celle de l'ancien $2S$ en y faisant

$$(12)\qquad q'_{k+1} = \ldots = q'_{k+s} = 0,$$

$$(13)\qquad q''_{k+1} = \ldots = q''_{k+s} = 0.$$

Les nouvelles équations du mouvement sont

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial q''_1} = \overline{Q_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \overline{S}}{\partial q''_k} = \overline{Q_k};$$

$\overline{Q_1}, \ldots, \overline{Q_k}$ désignent ce que deviennent $Q_1, \ldots, Q_k$ quand on tient compte des équations (12).

Or, le mouvement de Σ_k peut être considéré comme un mouvement de Σ_{k+s} sous l'action des forces données antérieurement et de forces nouvelles dues aux liaisons ajoutées. Désignons alors par $\left(\frac{\partial S}{\partial q''_{k+1}}\right), \ldots, \left(\frac{\partial S}{\partial q''_{k+s}}\right)$, ce que deviennent $\frac{\partial S}{\partial q''_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q''_{k+s}}$ quand on fait intervenir les relations (12) et (13); $\overline{Q_{k+1}}, \ldots, \overline{Q_{k+s}}$ correspondant de la même façon à $Q_{k+1}, \ldots, Q_{k+s}$, posons

$$(14) \qquad Q'_{k+1} = \left(\frac{\partial S}{\partial q''_{k+1}}\right) - \overline{Q_{k+1}}, \qquad \ldots, \qquad Q'_{k+s} = \left(\frac{\partial S}{\partial q''_{k+s}}\right) - \overline{Q_{k+s}}.$$

L'expression

$$(15) \qquad Q'_{k+1}\,\delta q_{k+1} + \ldots + Q'_{k+s}\,\delta q_{k+s}$$

représente le travail virtuel des forces dues aux liaisons ajoutées.

Ce résultat s'applique aussi bien aux systèmes holonomes et aux équations de Lagrange lorsque les liaisons ajoutées sont exprimables en termes finis. On choisit les variables de telle façon que les liaisons ajoutées se traduisent par les équations

$$(16) \qquad q_{k+1} = q^0_{k+1}, \qquad \ldots, \qquad q_{k+s} = q^0_{k+s},$$

les q^0 désignant des constantes. A la place des dérivées $\frac{\partial S}{\partial q''_{k+i}}$ on a les expressions $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_{k+i}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}$, où $2T$ désigne la force vive de Σ_{k+s}.

On observe que la méthode précédente revient à combiner celle des multiplicateurs de Lagrange avec un changement de variables convenable.

On peut appliquer la méthode précédente à un solide gêné en partant du solide libre ($k + s = 6$). Le dyname des réactions est, comme on sait, complètement déterminé par l'expression de son travail virtuel pour un déplacement quelconque du solide.

6. *Exemple I.* — Un solide de révolution homogène et pesant est mobile autour d'un point O de son axe, qui est fixe. On demande quel couple il faut appliquer au solide pour que son axe décrive un cône déterminé S, cette liaison étant sans frottement.

Conservons les notations classiques du problème de Lagrange et de Poisson, telles qu'elles sont indiquées dans le Traité de M. Appell. Supposons le cône donné par une équation de la forme

$$\psi = f(\theta). \tag{17}$$

Pour appliquer ce qui précède, effectuons le changement de variables

$$\psi = \psi_1 + f(\theta); \tag{18}$$

l'équation (17) devient

$$\psi_1 = 0. \tag{19}$$

La force vive du solide non soumis à cette liaison serait

$$\begin{aligned} 2T = {} & A\{[\psi'_1 + f'(\theta)\theta']^2 \sin^2\theta + \theta'^2\} \\ & + C\{[\psi'_1 + f'(\theta)\theta']\cos\theta + \varphi'\}^2, \end{aligned}$$

et l'équation de Lagrange relative à ψ_1 serait

$$\frac{d}{dt}\{A \sin^2\theta[\psi'_1 + f'(\theta)\theta'] + C\cos\theta\}[(\psi'_1 + f'(\theta)\theta']\cos\theta + \varphi'\} = 0.$$

Tenant compte de l'équation (19) de la liaison ajoutée le premier membre devient

$$\frac{d}{dt}\{A\sin^2\theta f'(\theta)\theta' + C\cos\theta[f'(\theta)\theta'\cos\theta + \varphi']\} = H. \tag{20}$$

Il resterait à faire disparaître les dérivées secondes dans l'expression de H au moyen des équations du mouvement.

Lorsque φ, θ, ψ_1 varient respectivement de $\delta\varphi, \delta\theta, \delta\psi_1$, le travail virtuel du couple cherché est $H\,\delta\psi_1$. Le moment de ce couple est nul par rapport à Oz puisque $\delta\varphi$ ne figure pas dans cette expression; $\delta\theta$ n'y figurant pas, le moment du couple est nul par rapport à l'axe instantané de rotation correspondant au mouvement où θ varie, φ restant constant [à cause de (17), ψ varie aussi]. Cet axe est situé dans le plan normal au cône S passant par l'axe Oz, et, puisque le moment du couple est nul par rapport à deux axes de ce plan, il est nul par rapport à tout axe de ce plan. L'axe du couple est donc normal à ce plan; le moment du couple par rapport à Oz_1 est d'ailleurs H; ce qui suffit à déterminer le couple.

7. *Exemple II.* — Une sphère homogène S se meut en roulant sur une surface fixe Σ sur laquelle elle ne peut ni glisser ni pivoter. Déterminer les réactions, en supposant que le mouvement ait lieu sous l'action d'un certain système de forces données.

Dans le cas d'une sphère homogène, la formule (9) du n° 4 devient, puisque $A = B = C$ et que $D = E = F = 0$,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} 2S = {} & M[u'(u' + 2Qw - 2Rv) + v'(v' + 2Ru - 2Pw) \\ & \qquad + w'(w' + 2Pv - 2Qu)] \\ & + A[p'(p + 2Qr - 2Rq) + q'(q' + 2Rp - 2Pr) \\ & \qquad + r'(r' + 2Pq - 2Qp)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les équations de liaison sont ici, en désignant par a le rayon de la sphère et supposant Gz dirigé suivant la normale commune à S et à Σ :

$$(22)\qquad u - aq = 0, \qquad v + ap = 0, \qquad w = 0, \qquad r = 0.$$

Nous poserons (¹)

$$u = u_1 + aq, \qquad v = v_1 - ap, \tag{23}$$

de sorte que les équations (22) deviennent

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad w = 0, \qquad r = 0. \tag{24}$$

En observant que $\frac{\partial u}{\partial u_1} = 1, \frac{\partial u}{\partial v_1} = \frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \ldots,$ on voit que les premiers membres des équations de M. Appell relatives aux intégrales $\int u_1\,dt$, $\int v_1\,dt$, $\int w\,dt$, $\int r\,dt$ prises comme paramètres sont

$$\begin{aligned}
F_1 &= M(u' + Qw - Rv) = Ma(q' + Rp) + \ldots = F + \ldots,\\
H_1 &= M(v' + Ru - Pv) = Ma(-p' + Rq) + \ldots = H + \ldots,\\
K_1 &= M(w' + Pv - Qu) = -Ma(Pp + Qq) + \ldots = K + \ldots,\\
L_1 &= A(r' + Pq - Qp) = A(Pq - Qp) \quad + \ldots = L + \ldots.
\end{aligned}$$

Les points désignent des termes qui s'annulent quand on utilise les relations (24).

Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ les coordonnées pluckériennes du système des forces données; en désignant par $u_1\,\delta t$, $v_1\,\delta t$, $w\,\delta t$, $p\,\delta t$, $q\,\delta t$, $r\,\delta t$ les variations infinitésimales des six paramètres adoptés pour le solide libre, le travail virtuel des forces données est

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}p + \mathcal{M}q + \mathcal{N}r + \mathcal{X}u + \mathcal{Y}v + \mathcal{Z}w)\,\delta t\\
&\quad = [(\mathcal{L} - a\mathcal{Y})p + (\mathcal{M} + a\mathcal{X})q + \mathcal{N}r + \mathcal{X}u_1 + \mathcal{Y}v_1 + \mathcal{Z}w]\,\delta t.
\end{aligned}$$

Celui des forces de liaison est donc

$$[(F - \mathcal{X})u_1 + (H - \mathcal{Y})v_1 + (K - \mathcal{Z})w + (L - \mathcal{N})r]\,\delta t.$$

(¹) p, q, r, u_1, v_1, w sont les coordonnées pluckériennes du torseur des rotations instantanées du solide rendu libre par rapport à des axes parallèles aux premiers, mais ayant pour origine le point de contact de S et Σ.

Les forces de liaison constituent par suite un dyname réductible à une force unique passant par le point de contact de projections $F - \mathfrak{X}$, $H - \mathfrak{Y}$, $K - \mathfrak{Z}$, et à un couple de moment $L - \mathfrak{M}$ porté par la normale commune Gz. Dans ces dernières expressions il convient de remplacer encore les dérivées p' et q' par leurs valeurs tirées des équations du mouvement (équations de M. Appell relatives au mouvement de la sphère assujettie aux liaisons et aux intégrales $\int p\,dt$, $\int q\,dt$ prises comme paramètres):

$$(A + Ma^2)(p' - Rq) = \mathfrak{L} - a\mathfrak{Y},$$
$$(A + Ma^2)(q' + Rp) = \mathfrak{M} + a\mathfrak{X}.$$