NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 568-576

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__568_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1765.

(1897, p. 243.)

On coupe, par un plan arbitraire, un ellipsoïde donné, et l'on prend la circonférence lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse d'intersection. Lorsqu'on fait varier le plan, on obtient des circonférences qui n'occupent qu'une région déterminée de l'espace; on demande quelle est la surface qui limite cette région?

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Rappelons d'abord un fait relatif au déplacement d'une figure de grandeur invariable assujettie à deux conditions seulement. Supposons que ces conditions soient telles que deux points de la figure soient astreints à rester chacun sur une surface. Le déplacement d'un troisième point sera en général indéterminé, et il n'y a qu'un cas d'exception : c'est celui *où les deux points sont tels que les normales à leurs surfaces trajectoires se rencontrent*. Soient, en effet, O leur point de rencontre et (P) leur plan. Quel que soit le déplacement infiniment petit de la figure, satisfaisant aux conditions imposées, le point O sera le foyer du plan (P), dans le système focal attaché à ce déplacement. Tout point M du plan (P) aura donc un déplacement normal à la droite OM ; autrement dit, quel que soit ce déplacement, le point M se trouve astreint à rester sur un élément de surface normal à la droite OM.

Cela posé, la question 1765 revient manifestement à la suivante : *On considère tous les angles droits dont les côtés sont tangents à l'ellipsoïde ; les sommets de ces angles ne peuvent sortir d'une certaine région de l'espace. Quelle est la surface qui limite cette région?* Soit AMB l'angle droit considéré dans une de ses positions limites. Pour tous les déplacements, en nombre quadruplement infini, qu'on peut lui donner, le point M doit rester sur un même élément de surface. Remarquons, en outre, que pour tous ces déplacements les points de contact A et B des côtés de l'angle avec l'ellipsoïde décrivent aussi des éléments de surfaces. Donc, d'après ce qui a été rappelé plus haut, il faut : 1° que les normales en A et B à l'ellipsoïde soient dans un même plan; 2° que le point M soit dans ce plan.

En d'autres termes, on est ramené au problème suivant : *Quel est le lieu du sommet d'un angle droit dont les deux côtés sont tangents à un ellipsoïde, le plan de l'angle droit étant de plus normal à la surface au point de contact de chacun des côtés de l'angle ?* Or ce lieu est connu : c'est une *surface de l'onde,* comme Mannheim l'a démontré (*voir* les *Principes et développements de Géométrie cinématique* du regretté géomètre, p. 428). Telle est la réponse à la question proposée.

2043.

(1906, p. 384)

Le limaçon de Pascal, qui a pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = 2 + \cos\omega,$$

est tel qu'il existe une infinité d'hexagones qui lui sont à la fois inscrits et circonscrits. R. B.

SOLUTION

Par l'Auteur.

Considérons, en général, une courbe de quatrième ordre C, ayant un point double à tangentes séparées et deux points de rebroussement. Une telle courbe est unicursale et de quatrième classe, d'après les formules de Plücker. On peut donc mener à C, d'un point m pris sur cette courbe, deux tangentes autres que la tangente en m. Chacune de ces tangentes rencontre C en un point différent du point m et du point de contact. On voit ainsi que si deux points m et n varient sur C de telle manière que la droite mn soit tangente à la courbe, à une position donnée pour le point m correspondent deux positions pour le point n et réciproquement. Autrement dit, il existe entre les deux points m et n une correspondance (2, 2). Cette correspondance est d'ailleurs évidemment symétrique.

Cela posé, je rappellerai la propriété suivante : soit C une courbe unicursale et appelons (γ) une correspondance (2, 2) symétrique établie entre deux points variant simultanément sur C. Etant donné un point m_1 quelconque sur C, appelons m_2 l'un des deux points de la courbe que (γ) fait correspondre à m_1; au point m_2 (γ) fait correspondre m_1 et un autre point m_3; de même au point m_3 (γ) fait correspondre m_2 et un autre point m_4, et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi successivement les points $m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n$. S'il arrive que pour une certaine position du point m_1 le point m_{n+1} coïncide avec lui, cette même circonstance se présentera, quel que soit le point m_1 de C. Cette propriété, dans le cas où C est une conique, n'est autre que le célèbre théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques, et l'extension au cas où C est une courbe unicursale quelconque est immédiate.

Il suffit de rapprocher ce résultat de ce qui a été dit au commencement pour formuler l'énoncé suivant :

Soit C *une courbe de quatrième ordre et de quatrième classe : s'il existe un polygone de n côtés inscrit et circonscrit à* C, *il existe une infinité de tels polygones.*

Le limaçon de Pascal est une courbe du quatrième ordre possédant un point double à tangentes en général séparées et deux points de rebroussement aux points cycliques. On peut donc lui appliquer le théorème qui précède et, pour résoudre la question proposée, il suffit d'établir qu'il existe un hexagone inscrit et circonscrit au limaçon particulier ayant pour équation

$$\rho = 2 + \cos\omega.$$

Or, ce limaçon, on le voit tout de suite, est tel que les tangentes à son point double font entre elles un angle de 120°. Soient OM et OM' ces tangentes, M et M' les points où elles rencontrent de nouveau le limaçon. Les considérations les plus simples font reconnaître que la droite MM' est tangente au limaçon en l'un de ses sommets A, et l'on a en OMM'OM'M un hexagone dégénéré inscrit et circonscrit à la courbe.

La proposition est donc établie.

Remarque. — Soient 123456 l'un quelconque des hexagones que l'on peut inscrire et circonscrire à la courbe. Quand l'hexagone varie, les sommets opposés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 sont conjugués dans une involution, car la correspondance qui existe entre eux est évidemment univoque et réciproque. M et M', O et O' sont deux couples de points conjugués dans cette involution, qui par suite se confond nécessairement avec celle qui fait se correspondre les points de la courbe symétriques par rapport à l'axe. On voit donc que :

Les sommets opposés de l'un quelconque des hexagones 123456 *inscrits et circonscrits au limaçon sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe de cette courbe.*

2060.

(1907, p. 94.)

Les angles d'un pentagone gauche ont chacun deux bissectrices, l'une intérieure, l'autre extérieure. Cinq bissectrices issues de sommets différents appartiennent à une même congruence linéaire, si les bissectrices extérieures sont en nombre pair. (R. B.)

2061.

(1907, p. 95.)

Au lieu du pentagone de l'énoncé précédent, considérons un hexagone. Six bissectrices issues de sommets différents appartiennent à un même complexe linéaire, si les bissectrices extérieures (*ou intérieures*) *sont en nombre pair.*

(Comparer à ces deux questions la question 2051, 1906, p. 480.) (R. B.)

SOLUTION

Par M. Thié.

On peut avoir recours ici aux considérations dont nous avons fait usage pour traiter la question 2051 (1907, p. 238).

Appliquons à chaque sommet du pentagone (ou de l'hexagone) considéré deux forces dirigées respectivement suivant les deux côtés qui aboutissent à ce sommet; supposons de plus que les intensités de toutes les forces ainsi introduites soient égales, et que les forces appliquées à deux sommets consécutifs soient opposées. Le système de forces ainsi constitué est en équilibre. Les deux forces appliquées en un sommet ont leur résultante dirigée suivant l'une des bissectrices de l'angle correspondant du polygone, et le nombre des bissectrices extérieures est pair, comme on le voit aisément. On en conclut que cinq (ou six) bissectrices issues de sommets différents sont les lignes d'action de forces en équilibre, si le nombre des bissectrices extérieures est pair. Donc, en vertu de théorèmes connus, ces bissectrices appartiennent, suivant le cas, à une congruence linéaire ou à un complexe linéaire.

2066.

(1907, p. 96.)

Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = py^3 + qy^2 + ry + s,$$

où p, q, r, s sont des fonctions de x, sachant que cette équation admet l'intégrale particulière $\beta = -\dfrac{q}{3p}$.

(Dr W. KAPTEYN.)

PREMIÈRE SOLUTION
Par M. PARROD.

En posant

$$y = \beta + e^z,$$

on obtient une équation différentielle de la forme

$$\frac{dz}{dx} = pe^{2z} + A$$

où A est une fonction de x.

Soit

$$z = u + \int \mathrm{A}\, dx,$$

$$\frac{du}{dx} = p\, e^{2u} e^{2\int \mathrm{A}\, dx}.$$

Intégrons, il vient

$$e^{-2u} = -2 \int p\, e^{2\int \mathrm{A}\, dx}\, dx;$$

$\int \mathrm{A}\, dx$ est une fonction primitive particulière de A.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. Amblard.

Posons

$$y = y_1 + \beta;$$

l'équation proposée devient

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{d\beta}{dx} = p y_1^3 + 3 y_1^2 \beta p + 3 p \beta^2 y_1$$
$$+ q y_1^2 + 2 q y_1 \beta + r y_1 + p \beta^3 + q \beta^2 + r \beta + s,$$

et, puisque β est une solution,

$$\frac{dy_1}{dx} = p y_1^3 + (3 \beta p + q) y_1^2 + (3 p \beta^2 + 2 q \beta + r) y_1,$$

ou, en tenant compte de la valeur de β,

$$\frac{dy_1}{dx} = p y_1^3 + \left(r - \frac{q_2}{3p}\right) y_1;$$

l'équation est ainsi ramenée à une équation de Bernoulli; cette équation s'écrit

$$\frac{1}{y_1^3} \frac{dy_1}{dz} = p + \left(r - \frac{q^2}{3p}\right) \frac{1}{y_1^2}$$

et, en posant $\frac{1}{y_1^2} = z$, elle devient

$$-\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} = \left(r - \frac{q^2}{3p}\right) z + p,$$

nous avons ainsi une équation linéaire qui s'intégrera par les méthodes connues.

Autres solutions de MM. LETIERCE et J. ROSE.

2069.

(1907, p. 96.)

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface lieu du milieu des cordes de la courbe gauche

$$x = t^n, \qquad y = t^{n-1}, \qquad z = t^{n-2}.$$

(D[r] J. DE VRIES.)

SOLUTION

Par M. J. ROSE.

La surface lieu du milieu des cordes de cette courbe est, en coordonnées curvilignes, définie par les équations

$$x = \tfrac{1}{2}(u^n + v^n), \quad y = \tfrac{1}{2}(u^{n-1} + v^{n-1}), \quad z = \tfrac{1}{2}(u^{n-2} + v^{n-2}).$$

L'équation générale des asymptotiques est de la forme

$$\mathrm{D}\, du^2 - 2\,\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2 = 0.$$

La surface proposée étant une surface de translation $\mathrm{D}' = 0$. Quant à D' et D'', ils ont respectivement pour valeurs

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \dfrac{n(n-1)}{2}u^{n-2} & \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}u^{n-3} & \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}u^{n-4} \\ \dfrac{n}{2}u^{n-1} & \dfrac{n-1}{2}u^{n-2} & \dfrac{n-2}{2}u^{n-3} \\ \dfrac{n}{2}v^{n-1} & \dfrac{n-1}{2}v^{n-2} & \dfrac{n-2}{2}v^{n-3} \end{vmatrix}$$

ou

$$\mathrm{D} = \frac{n(n-1)(n-2)}{8}\, u^{n-4}\, u^{n-3}\, v^{n-3}\, u\,(u - v)^2.$$

De même

$$\mathrm{D}'' = -\,\frac{n(n-1)(n-2)}{8}\, v^{n-4}\, u^{n-3}\, v^{n-3}\, v\,(u - v)^2.$$

L'équation différentielle des asymptotiques est donc

$$u^{n-3}\,du^2 - v^{n-3}\,dv^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(u^{\frac{n-3}{2}}\,du \pm v^{\frac{n-3}{2}}\,dv\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$u^{\frac{n-1}{2}} \pm v^{\frac{n-1}{2}} = \text{const.}$$

2075.

(1907, p. 240.)

Si, sur chaque ordonnée de la courbe (M) *rapportée à des axes rectangulaires, on porte le segment* MP *égal à la longueur* MN *de la normale limitée à* Ox, *et si la normale correspondant à la développée de* (M) *coupe en* H *la perpendiculaire élevée en* N *à* Ox, *la tangente à la courbe* (P) *passe par le point de rencontre de la tangente à la courbe* (M) *et de la perpendiculaire abaissée de* N *sur* MH.

(M. d'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. F. BOULAD.

Appelons C le centre de courbure répondant au point M, et I le point de rencontre des tangentes en M et P. Soient $\widehat{M}$ et $\widehat{P}$ les angles que font respectivement ces deux tangentes avec le segment MP. En vertu de la formule connue

$$d.\mathrm{AB} = d(\mathrm{A})\cos\widehat{\mathrm{A}} - d(\mathrm{B})\cos\widehat{\mathrm{B}}$$

de la différentielle d'un segment AB intercepté par deux courbes sur la tangente à une troisième courbe, nous avons les deux relations

$$d.\mathrm{MP} = d(\mathrm{M})\cos\widehat{\mathrm{M}} - d(\mathrm{P})\cos\widehat{\mathrm{P}},$$

$$d.\mathrm{MN} = -\,d(\mathrm{N})\cos\left(\widehat{\mathrm{MN}x} \text{ ou } \widehat{\mathrm{NHC}}\right).$$

D'autre part, la formule de Newton (*Traité de Géométrie* *infinitésimale* de M. d'Ocagne, p. 260) donne

$$\frac{d(\mathrm{P})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{MI}}, \qquad \frac{d(\mathrm{N})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{NH}}{\mathrm{MC}}.$$

En introduisant les valeurs de $d(\mathrm{P})$ et $d(\mathrm{N})$ dans les deux relations ci-dessus, et en égalant les membres de ces dernières en raison de ce que $\mathrm{MP} = \mathrm{MN}$, on déduit, après suppression du facteur commun $d(\mathrm{M})$,

$$\cos\widehat{\mathrm{M}} - \frac{\mathrm{PI}}{\mathrm{MI}}\cos\widehat{\mathrm{P}} = -\frac{\mathrm{NH}}{\mathrm{MC}}\cos\left(\widehat{\mathrm{NHC}}\right).$$

Mais, comme on a

$$\mathrm{MI}\cos\widehat{\mathrm{M}} - \mathrm{PI}\cos\widehat{\mathrm{P}} = -\mathrm{MP}, \qquad \mathrm{NH}\cos\left(\widehat{\mathrm{NHC}}\right) = \mathrm{HC},$$

il vient

$$\frac{\mathrm{MP\ ou\ MN}}{\mathrm{MI}} = \frac{\mathrm{HC}}{\mathrm{MC}}$$

qui montre que les deux triangles rectangles NMI et HCM sont semblables.

Par suite, NI *est perpendiculaire à* MH. C. Q. F. D.