R. BRICARD

L'œuvre d'Amédée Mannheim

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 97-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__97_0>

L'ŒUVRE D'AMÉDÉE MANNHEIM ;

1. Avec Amédée Mannheim vient de disparaître un des mathématiciens les plus remarquables que la France ait produits au XIX^e siècle. Son talent, profondément original, lui fait une place à part dans la Géométrie pure. Ses méthodes, qui lui appartiennent en propre, ont été entre ses mains un instrument d'une puissance singulière, capable de rivaliser avec l'Analyse de pénétration et de fécondité.

L'œuvre de Mannheim frappe à la fois par l'unité des principes qui ont dirigé ce savant dans toutes ses recherches, et par la diversité des applications qu'il en a faites dans les domaines les plus variés. Aussi la tâche est-elle particulièrement difficile d'exposer cette œuvre dans un ordre satisfaisant. Il ne peut être question de s'attacher à l'ordre chronologique. Comme beaucoup d'inventeurs féconds, Mannheim menait de front plusieurs recherches, laissant momentanément de côté un sujet pour y revenir plus tard, et deux Mémoires qui se complètent mutuellement ont ainsi paru à des époques différentes. D'autre part, une classification établie d'après la nature des sujets traités sera nécessairement artificielle et quelque peu défectueuse : il arrive qu'un travail de Mannheim, spécialement consacré aux propriétés du déplacement d'une figure, renferme de remarquables théorèmes sur les surfaces, et qu'un autre Mémoire, relatif aux pinceaux de droites, vaut surtout par le rôle qu'y jouent les considérations cinémtiques. Néanmoins, il faut se déterminer, et j'examinerai successivement trois groupes de travaux en lesquels peut se répartir l'œuvre principale de Mannheim : les travaux de Géométrie cinématique pure, les travaux relatifs à la théorie des surfaces et à celle des pinceaux, les travaux relatifs à la surface de l'onde. Ces derniers, bien qu'ils aient un objet très particulier, m'ont semblé mériter une mention toute spéciale; c'est à leur occasion que Mannheim a peut-être le mieux donné la mesure de son ingéniosité vraiment surprenante, et manifesté son sentiment si personnel de l'élégance géométrique.

2. Avant d'aborder cette étude, il convient de mentionner des inventions et des travaux étrangers à la Géométrie pure, à laquelle Mannheim a consacré la meilleure partie de son existence : son heureuse modification de la règle à calculs; son « vernier de vernier » qui permet de mesurer une longueur à $\frac{1}{100}$ près, par exemple, en employant deux verniers à 10 divisions au lieu d'un seul vernier à 100 divisions; sa contribution à l'étude des phénomènes d'interférence, pendant l'éclipse totale du 18 juillet 1860; des services importants rendus à la construction du matériel d'artillerie. Tous ces travaux, qui se rapportent au début de sa carrière, témoignent d'un esprit original et inventif, dont l'activité aurait pu s'exercer dans d'autres domaines que dans les Mathématiques pures.

Le premier travail géométrique de Mannheim est daté de 1851 (l'auteur avait alors vingt ans) : il est relatif à la transformation par polaires réciproques, et à l'application de cette transformation aux propriétés métriques. Son Mémoire, paru à une époque où la notion de transformation, si prodigieusement étendue aujourd'hui, commençait à peine à prendre corps, doit être considéré comme fort remarquable. Il attira l'attention de Steiner qui discerna dans le jeune géomètre un talent plein de promesses.

Puis Mannheim publie successivement d'autres travaux, relatifs soit au même sujet, qu'il enrichit de développements nouveaux, soit à diverses questions de Géométrie infinitésimale. Il serait impossible de signaler tous les résultats élégants qui abondent dans ces Mémoires. Citons, presque au hasard, les constructions des centres de courbure de diverses courbes, en particulier de l'ovale de Descartes, et des caustiques par réfraction d'une courbe donnée; l'application de l'inversion à la cyclide de Dupin; l'étude des polygones inscrits ou circonscrits aux coniques et qui varient d'après certaines lois; des théorèmes curieux sur les arcs de courbes planes ou sphériques spéciales, etc.

Plusieurs des résultats obtenus au cours de ces premières recherches se trouvent réunis dans une Note que Poncelet a tenu à ajouter au deuxième cahier de ses *Applications d'Analyse et de Géométrie* (1865).

Peu de temps après, Mannheim va prendre une haute place dans la Science en publiant son premier Mémoire relatif à la théorie du déplacement, qui sera pour lui l'occasion de découvertes d'une importance primordiale.

3. On ne connaissait que des théorèmes isolés sur le mouvement d'une figure de grandeur invariable, quand Mannheim entreprit l'étude systématique de ce vaste sujet. Ses recherches aboutirent bientôt à un Mémoire fondamental, qui fut, en 1868, l'objet d'un rapport élogieux de Chasles, et dont l'Académie des Sciences ordonna l'impression aux Mémoires des Savants étran-

gers. La *Géométrie cinématique,* tel est le nom que Mannheim devait donner à cette partie de la Science, s'y trouvait pour la première fois constituée en corps de doctrine. Comme ce travail est d'une importance historique considérable, il convient de l'analyser avec quelque détail.

Mannheim étudie les propriétés du déplacement infiniment petit d'une figure assujettie à cinq conditions et résout divers problèmes qu'on peut se poser au sujet d'un tel déplacement : construire, pour une position donnée, l'axe instantané de rotation et de glissement, le pas du mouvement hélicoïdal infiniment petit, le plan normal à la trajectoire d'un point, la caractéristique d'un plan, etc. Ses solutions sont complètes et définitives.

Il aborde ensuite l'étude du déplacement à deux ou à trois paramètres. Dans le premier cas, les normales aux surfaces trajectoires forment une congruence linéaire, comme nous dirions aujourd'hui. Dans le second cas, les divers points de la figure ne décrivent pas, en général, à partir d'une position donnée, d'éléments de surfaces trajectoires déterminées. Il n'y a d'exception que pour les points d'un certain hyperboloïde. Ces théorèmes avaient déjà été énoncés par Schönemann en 1855; mais le travail du géomètre allemand, qui avait passé inaperçu, était ignoré de Mannheim, dont la découverte est absolument indépendante.

Ces généralités constituent la première partie du Mémoire. La seconde renferme des applications d'une haute importance à la théorie des courbes et à celle des surfaces, à l'hélicoïde réglé.

La plupart des résultats contenus dans ce travail sont aujourd'hui classiques et forment, à l'École Polytechnique par exemple, la base de l'enseignement géométrique.

Dans ses travaux ultérieurs consacrés à la Géométrie cinématique, Mannheim aborde des problèmes difficiles relatifs aux propriétés infinitésimales du second ordre des déplacements. Ces propriétés concernent les plans osculateurs et les rayons de courbure des trajectoires, dans le cas du déplacement à 5 conditions, les rayons de courbure principaux et les plans principaux des surfaces trajectoires, dans le cas du déplacement à 4 conditions. Voici par exemple quelques-uns des résultats obtenus au cours de ces recherches qui exigent une pénétration singulière (je choisis ceux qui se rapportent au déplacement à deux paramètres) :

Le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite est une courbe gauche du sixième ordre.

Le lieu des points d'une figure qui sont points paraboliques sur leurs surfaces trajectoires est une surface du sixième ordre qui contient l'ombilicale.

Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure égaux est une surface du huitième ordre.

Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure opposés est une surface du cinquième ordre.

C'est encore à l'occasion du déplacement à deux paramètres que Mannheim fait une étude approfondie du conoïde de Plücker ou cylindroïde et découvre de nouvelles propriétés de cette remarquable surface.

D'autres travaux se rapportent à des sujets plus particuliers : il examine, par exemple, le cas spécial où la figure mobile de grandeur invariable est constituée par un faisceau de plans. Il met en évidence les particularités curieuses que présente le mouvement du double cône employé dans les expériences de physique élémentaire. Souvent, pour mieux illustrer la valeur de sa méthode, Mannheim l'applique de préférence à des problèmes déjà résolus par d'autres voies. Il estimait en effet qu'un résultat inédit importe moins au progrès de la Science que la découverte d'une théorie coordonnant les théorèmes connus, permettant d'en épuiser les conséquences et d'en saisir plus intimement le sens et la raison d'être. C'est ainsi qu'il approfondit, après Halphen, l'étude du mouvement d'une droite dont tous les points décrivent des coniques. Il traite un problème déjà résolu par M. Darboux :

Déterminer le mouvement le plus général d'une figure de grandeur invariable dont tous les points décrivent des courbes planes.

Citons encore son étude synthétique de l'hyperboloïde articulé de M. Greenhill, et sa démonstration du théorème connu :

L'herpolhodie de Poinsot n'a pas de points d'inflexion.

Il faut enfin mentionner une intéressante méthode de transformation des propriétés cinématiques, par la considération originale des *files de sphères*. Pour donner une idée des propositions auxquelles conduit cette méthode de transformation, je rappellerai l'un des théorèmes cités plus haut :

Dans un déplacement à deux paramètres, le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite est une courbe gauche du sixième ordre.

Il se transforme en celui-ci :

Les surfaces auxquelles les plans d'un faisceau de grandeur constante restent tangents ont leurs centres de courbure principaux sur une courbe gauche du sixième ordre.

4. La méthode cinématique a conduit Mannheim à considérer la théorie des surfaces sous de nouveaux points de vue et à l'enrichir de résultats nombreux et intéressants.

Un premier travail concerne la généralisation du théorème de Meusnier; ce théorème célèbre est relatif à des contacts du second ordre. Le beau théorème découvert par Mannheim s'énonce ainsi :

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, leurs $(n-1)^{\text{ièmes}}$ polaires ont pour axes de courbure des droites passant par un même point.

Si l'on fait $n = 1$, on retrouve le théorème de Meusnier, en convenant que la polaire d'ordre zéro d'une courbe gauche est cette courbe elle-même.

Mais la contribution la plus importante que Mannheim ait apportée à la théorie des surfaces réside, semble-t-il, dans la découverte du *paraboloïde des huit droites*, dont je rappellerai brièvement la définition.

Remarquons d'abord que tout déplacement (fini ou infinitésimal) d'un dièdre de grandeur constante peut être ramené à une rotation simple (en vertu de la faculté qu'a ce dièdre de recevoir une translation sans cesser de rester en coïncidence avec lui-même). Cela posé, considérons, en chaque point d'une surface, le dièdre formé par les plans principaux. Ce dièdre peut être amené, à partir de l'une de ses positions, dans une infinité de positions infiniment voisines, et chacun des déplacements correspondants est réductible à une rotation, en vertu de la remarque faite plus haut. *Le lieu des axes autour desquels s'effectuent toutes ces rotations est un paraboloïde,* dont on peut mettre en évidence huit génératrices qui jouent un rôle remarquable par rapport à la surface et par rapport à sa développée : d'où le nom de *paraboloïde des huit droites*.

L'existence de ce paraboloïde correspond à celle d'une relation entre les éléments de la courbure des deux nappes de la développée d'une surface. Les résultats deviennent particulièrement intéressants quand la surface proposée a ses rayons de courbure principaux fonctions l'un de l'autre. Une telle surface est ce que l'on nomme aujourd'hui *surface de Weingarten*. Mannheim retrouve aisément, par l'application de ses méthodes, les théorèmes fondamentaux qui concernent ces surfaces. Il étudie en particulier les cas où la relation qui relie le rayon de courbure a l'une des formes suivantes :

$$R_1 \pm R_2 = \text{const.}, \qquad R_1 R_2 = \text{const.},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} = \text{const.}$$

Il obtient ainsi, à côté de théorèmes démontrés déjà par Ribaucour et par Halphen, des résultats nouveaux et non moins intéressants.

Un sujet plus difficile encore est l'étude des propriétés qui dépendent d'infiniment petits du troisième ordre. Voici comment procède Mannheim, fidèle à son principe de matérialiser, en quelque sorte, les données d'une question par des éléments représentables. Pour définir les éléments d'ordre supérieur d'une courbe plane, on peut associer à un point de cette courbe les centres de courbure de ses développées successives. D'une manière analogue, Mannheim associe à un point d'une surface les *droites de courbure* des deux nappes de la développée. Cette méthode, qui met bien en lumière sa conception artistique de la Géométrie, est appliquée avec un plein succès. Elle lui permet de démontrer facilement des théorèmes dus à Beltrami, à Ribaucour, à Laguerre, etc., et le conduit à beaucoup de propositions nouvelles. Citons celle-ci, par exemple :

Les centres de courbure des développées de toutes les sections faites dans une surface par des plans passant par une même tangente à cette surface, et qui correspondent au point de contact de cette tangente, sont sur une conique.

Enfin, Mannheim parvient à résoudre de plusieurs façons différentes deux problèmes qui pouvaient sembler inabordables :

Construire le rayon de courbure de la développée d'une section plane d'une surface.

Construire le rayon de courbure de la développée de la courbe de contour apparent d'une surfacc qu'on projette orthogonalement sur un plan.

Et, notons-le, Mannheim ne se contente pas d'indiquer la possibilité de solutions et de les esquisser. Elles sont poussées jusqu'au bout, avec ce souci de l'élégance et de l'*économie graphique,* si l'on peut dire, que Mannheim apporte dans toutes ses productions. Le fini de ce travail fait penser à une parole de Chasles que Mannheim aimait à citer : « Il y a une différence très grande entre un sujet traité complètement dans les questions nombreuses auxquelles il peut donner lieu et les questions partielles et restreintes où l'on s'arrête à la moindre difficulté. »

La méthode cinématique, si heureusement adaptée à la théorie des surfaces, ne se montre pas moins féconde pour l'étude des courbes gauches. Mannheim l'a appliquée en particulier aux *courbes de Bertrand* (courbes dont les normales principales sont normales d'autres courbes), et là encore, en même temps que des démonstrations nouvelles de théorèmes connus, des propriétés inédites se sont offertes.

Les travaux sur les surfaces se relient étroitement, dans l'œuvre de Mannheim, aux recherches sur les *congruences de droites*, ou plutôt aux *pinceaux,* qui sont les éléments infinitésimaux de ces congruences. Ces études, poursuivies depuis 1872, ont abouti au très beau *Mémoire d'Optique géométrique*, publié en 1884 dans les *Atti della R. Accademia dei Lincei.*

Le point de départ est la représentation d'un élément de surface réglée par un point, représentation qui conduit à celle, d'une simplicité si frappante, d'un pinceau par un cercle. La considération de ce cercle met immédiatement en évidence l'existence des *points focaux* et des *points limites* découverts par Kummer.

Ces principes, appliqués d'abord à l'étude des *normalies* (1), en font connaître des propriétés élégantes et tout à fait nouvelles, telles que celle-ci :

Lorsque la directrice d'une normalie est une ligne

(1) Mannheim a donné, comme l'on sait, le nom de *normalies* aux surfaces réglées, engendrées par les normales à une surface associée suivant une loi quelconque. Il semble avoir été le premier à reconnaître l'importance considérable des normalies dans les recherches de Géométrie infinitésimale.

asymptotique d'une surface, le produit des rayons de courbure principaux de cette normalie en chaque point de sa directrice est égal au produit analogue pour la surface, au même point.

Puis l'auteur s'occupe de construire les éléments d'un pinceau réfracté suivant la loi de Descartes. A des formules données par Bertrand, et relatives d'ailleurs au seul cas où le pinceau considéré est un pinceau de normales (plans focaux rectangulaires), Mannheim substitue des constructions géométriques valables dans le cas le plus général, et au moyen desquelles il retrouve, bien entendu, les formules de Bertrand dont l'interprétation était difficile.

Comme je l'ai dit, la théorie des pinceaux intervient souvent, dans l'œuvre de Mannheim, à l'occasion des recherches sur les surfaces, et aussi des études sur le déplacement à deux paramètres.

5. La surface de l'onde de Fresnel a toujours été pour Mannheim un sujet d'études de prédilection. C'est aussi, je le répète, l'un de ceux où se manifeste, de la façon la plus saisissante, l'acuité de sa vision géométrique.

Les principes fondamentaux de la Géométrie cinématique permettent de trouver rapidement : soit le point de contact de la surface avec l'un de ses plans tangents, dans le cas d'une définition tangentielle; soit le plan tangent en un point dans le cas d'une définition ponctuelle. Mannheim a d'ailleurs introduit toute cette partie élémentaire de la théorie dans son enseignement. Mais la recherche des éléments de la courbure présente plus de difficultés. Mannheim les obtient par les considérations suivantes :

Considérons une normale à un ellipsoïde et faisons-la tourner d'un angle droit autour du centre de l'ellipsoïde, dans le plan déterminé par la normale et par le centre. La droite ainsi obtenue est normale à une certaine surface de l'onde. L'ensemble des deux normales constitue une figure de grandeur invariable, animée d'un mouvement à deux paramètres, dont l'étude conduit, d'une manière naturelle, à la solution du problème posé.

Les énoncés élégants se présentent en foule. Citons celui-ci, par exemple :

Si l'on considère deux points correspondants de l'ellipsoïde et de la surface de l'onde, le cercle qui passe par le centre des deux surfaces et par les centres de courbure principaux de l'ellipsoïde au point considéré, et le cercle analogue relatif à la surface de l'onde sont tangents entre eux.

La construction des centres de courbure de la surface de l'onde mène à la détermination des huit ombilics réels dont on ne s'était pas antérieurement occupé.

Une partie également fort remarquable de l'étude de Mannheim concerne la surface de l'onde considérée comme *surface limite*. On sait qu'à tout complexe de droites est attachée une certaine surface, dite *surface de singularités* ou *surface limite*. Cette surface est, en général, une surface de Kummer pour un complexe du second ordre, et se réduit à une surface de l'onde dans le cas où le complexe considéré est constitué par les arêtes des dièdres droits circonscrits à un ellipsoïde (complexe de Painvin). On voit donc apparaître encore une figure mobile de grandeur constante, et l'on conçoit en quelle abondance la Géométrie cinématique va fournir de nouvelles propriétés de la surface de l'onde.

Il est impossible de séparer ces recherches profondes de celles que Mannheim a poursuivies sur les surfaces homofocales du second ordre et sur les éléments de courbure de ces surfaces. Il montre, par exemple, qu'on peut définir une famille de quadriques homofocales dont chacune coupe partiellement une surface de l'onde donnée suivant une ligne sphérique. Cela l'amène à un élégant théorème dont voici l'énoncé :

Par une tangente à une ligne de courbure d'un ellipsoïde on mène les plans tangents à un ellipsoïde homofocal à celui-ci; le dièdre formé par ces deux plans tangents est de grandeur constante, quelle que soit la tangente considérée.

En poursuivant cette étude, il obtient des relations remarquables et simples entre les centres de courbure principaux des trois quadriques homofocales qui passent par un même point.

6. Telle est, résumée bien incomplètement, l'œuvre principale de Mannheim. J'aurais pu mentionner encore de nombreuses Notes de Géométrie élémentaire, dont aucune n'est indifférente. Si simple que soit le sujet traité, un détail de démonstration ingénieux et inattendu vient toujours frapper le lecteur. C'est comme le divertissement d'un maître. J'aurais pu rappeler aussi l'influence heureuse qu'a eue Mannheim sur l'enseignement de la Géométrie descriptive, en retirant à la ligne de terre son importance imméritée. Mais je n'ai voulu m'attacher qu'aux grandes idées de ce géomètre, à celles qui lui assurent dans la Science une place durable.

Ce sont les découvertes dont j'ai fait la brève analyse qui ont servi de matériaux pour l'imposant Ouvrage que Mannheim a publié en 1894, sous le titre de : *Principes et Développements de Géométrie cinématique,* et qui restera l'un des monuments de la Science française au XIX^e siècle. Il serait difficile de citer beaucoup de Traités mathématiques de cette étendue aussi complètement originaux, et dont la lecture soit aussi propre à développer l'esprit d'invention. Dans un tel Livre, où tout est personnel, les idées semblent encore animées de l'activité qui leur a donné le jour. Elles y gardent une chaleur communicative de vie, qu'elles perdent dans un Ouvrage de seconde main où, rangées en bel ordre sans doute, elles dorment glacées comme dans des vitrines.

La Géométrie pure, telle que la concevait Mannheim, est aujourd'hui un peu délaissée, il faut bien le reconnaître. Les recherches de Géométrie infinitésimale se font principalement dans la voie que Gauss a ouverte par son admirable Mémoire fondamental, et qui n'est pas encore complètement explorée. La Géométrie des courbes et des surfaces algébriques est surtout un prétexte à des investigations analytiques, et voit bien souvent son rôle réduit à illustrer les propriétés des fonctions transcendantes. Il serait injuste et puéril, assurément, de s'insurger contre un mouvement qui a conduit à de magnifiques découvertes. Mais faut-il en conclure que désormais la Géométrie synthétique doit végéter au second plan, qu'il lui est interdit de contribuer à l'édification de la haute Science? Je suis fermement convaincu du contraire, pour ma part. La conception directe des êtres de l'espace est appelée, je le crois, à rendre encore d'éclatants services. Et le jour où les chercheurs s'orienteront dans ce sens (à cause, peut-être, de l'épuisement des mines actuellement exploitées), les travaux de Mannheim seront l'origine de belles et profondes découvertes. Il en aura fourni la matière par les nombreux problèmes dont l'énoncé se présente naturellement à la suite de ceux qu'il a considérés. Il aura montré la voie qui y mène par les modèles qu'il a laissés dans *l'art d'inventer*. C'est ainsi que son œuvre est assurée d'une vie durable, et qu'elle se relie à la science de l'avenir.

R. Bricard.