NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 136-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__136_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2108.

(1908, p. 480)

On donne un triangle ABC *et le centre* O *de son cercle circonscrit. On prend les symétriques* A′, B′ *de* O *par* *rapport aux côtés issus de* C : *le cercle* A′CB′ *et les cercles analogues pour les sommets* A, B *se coupent en un même point du cercle* ABC.

(Canon.)

Solution,

Par M. R. B.

Il est aisé de voir que les points A′, B′, C′ sont respectivement symétriques des points A, B, C par rapport au centre du cercle des neuf points du triangle ABC. Le théorème apparaît alors comme cas particulier de la proposition suivante :

Soit AB′CA′BC′ *un hexagone ayant un centre de symétrie. Les cercles* ABC, AB′C′, A′BC′, A′B′C *ont un point commun.* (*Il en est de même des cercles* A′B′C′, A′BC, AB′C, ABC′.)

Les six sommets de l'hexagone appartiennent en effet à une ellipse sur laquelle ils sont deux à deux diamétralement opposés. Le cercle ABC coupe de nouveau l'ellipse en un point P tel que les cordes AP et BC soient également inclinées sur l'axe de l'ellipse. Mais BC est parallèle à B′C′; AP et B′C′ sont donc également inclinées sur l'axe de l'ellipse, et par conséquent le cercle AB′C′ passe par le point P. Il en est de même des deux autres cercles visés dans l'énoncé, et la proposition est ainsi démontrée.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2115.

(1909, p. 56.)

Si l'on définit un tétraèdre SABC *en donnant les faces* λ, μ, ν *du trièdre* S *et la longueur* α, β, γ *des arêtes issues de* S, *le tétraèdre est orthocentrique sous les deux conditions*

$$\frac{\alpha}{\cos\lambda} = \frac{\beta}{\cos\mu} = \frac{\gamma}{\cos\nu}.$$

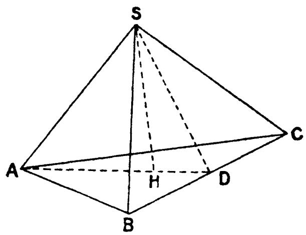
Cela étant, dans un tétraèdre orthocentrique ABCD *dont* H *est l'orthocentre, on donne les valeurs algébriques des segments* $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HD}$, *le sens positif sur chaque hauteur allant de la base vers le sommet; déterminer la* *valeur commune des rapports égaux*

$$\frac{\cos(b, c)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\cos(c, a)}{\sqrt{\beta}} = \frac{\cos(a, b)}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\cos(d, a)}{\beta\gamma} = \ldots = \ldots.$$

SOLUTION,

Par M. Clapier.

Soit H l'orthocentre du triangle ABC; la hauteur issue de S



passe par ce point, et nous avons

$$\overline{SA}^2 - \overline{SD}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{DH}^2 = AD(AH - DH).$$

D'autre part, SD est perpendiculaire à BC et

$$\widehat{BSC} = \widehat{BSD} + \widehat{DSC};$$

donc

$$\cos\lambda = \frac{\overline{SD}^2}{\beta\gamma} - \frac{DB \times DC}{\beta\gamma},$$

$$\beta\gamma \cos\lambda = \overline{SD}^2 - DH \times DA,$$

et, retranchant de la première relation, il vient

$$\alpha^2 - \beta\gamma \cos\lambda = AD \times AH = \overline{AH}^2 + \rho^2,$$

ρ étant le rayon du cercle conjugué au triangle ABC; on en déduit

$$\beta\gamma \cos\lambda = \gamma\alpha \cos\mu = \alpha\beta \cos\nu = h^2 - \rho^2,$$

ce qui démontre la première partie de la question.

Remarquons que la puissance du point H par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre est

$$2\rho^2 = 2dh,$$

d étant la distance de ce point à l'orthocentre.

D'après cela, si l'on considère le tétraèdre ABCD, dont l'orthocentre H est supposé à l'intérieur de son volume, nous aurons

$$\widehat{BHC} = \text{supplém. de } (b, c)$$

et

$$\beta\gamma \cos(b, c) = h\delta = \mu^2,$$

μ étant le rayon de la sphère conjuguée au tétraèdre donné. Si l'on désigne par (H) la puissance prise avec son signe du point H, par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre, nous aurons les relations algébriques

$$\frac{\cos(b, c)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\cos(c, a)}{\sqrt{\beta}} = \frac{\cos(a, b)}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\cos(d, a)}{\beta\gamma} = \frac{-(\mathrm{H})}{3\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Il reste à exprimer (H) à l'aide des quantités α, β, γ, δ; or nous avons

$$\frac{2(\mathrm{H})}{3} = 2\beta\gamma\cos(b, c) = -(\beta^2 + \gamma^2) + \overline{\mathrm{BC}}^2;$$

d'où, en additionnant les six égalités correspondant aux six arêtes du tétraèdre, on déduit

$$4(\mathrm{H}) = \Sigma_6 \overline{\mathrm{BC}}^2 - 3\Sigma\alpha^2.$$

Autre solution par M. Bouvaist.

2117.

(1909, p. 100.)

Étant données dans l'espace deux figures égales F *et* F′, *soient* A *un point de la première et* B *le point correspondant de la seconde; le point* B *étant considéré comme point de* F, *soit* C *le point correspondant de* F′; *le point* C *étant considéré comme point de* F, *soit* D *le point correspondant* *de* F'. *Les deux triangles* ABC *et* BCD *sont égaux. Démontrer* directement *que, si* O *est le centre de la sphère qui passe en* A, B, C, D, *on ne peut généralement pas faire coïncider les deux tétraèdres* OABC *et* OBCD (*qui sont d'ailleurs égaux*) *en mettant* A *en* B, B *en* C, C *en* D.

(G. F.)

SOLUTION,

Par un ABONNÉ.

Les deux demi-plans qui ont pour bord commun la droite BC, et qui contiennent respectivement les points A et D, forment un dièdre dont le plan bissecteur contient le point O ; le fait énoncé est une conséquence de cette position du point O.

Autre solution par M. VAULOT.

2122.

(1909, p. 143)

Étant donné un quadrilatère plan circonscriptible à un cercle, on divise chaque côté en deux segments proportionnels aux longueurs des côtés adjacents. Démontrer que les quatre points obtenus sont sur un même cercle.

(CLAPIER.)

SOLUTION,

Par M. PARROD.

Soient E, F, G et H les quatre points respectivement situés sur les côtés AB, BC, CD et DA du quadrilatère.

On a

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AD + BC},$$

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AB}{AB + DC},$$

donc

$$AE = AH.$$

Les triangles AEH, BEF, ... étant isoscèles, on voit facilement que les angles opposés du quadrilatère EFGH sont supplémentaires.

Il est donc inscriptible, et le cercle circonscrit est concentrique au cercle inscrit dans le quadrilatère donné.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Duby, P. Favre, Giraudon, Klug, P. de Lépinay, Pélissier.

2123.

(1909, p. 143.)

L'enveloppe des cercles qui ont leur centre sur un cercle donné et qui sont tangents à un diamètre fixe de ce cercle est une épicycloïde à deux rebroussements.

(E.-N. Barisien.)

Solution,

Par M. Parrod.

Ce théorème est un cas particulier du suivant : *L'enveloppe des cercles qui ont leur centre sur un cercle donné et qui sont tangents à une hypocycloïde est une épicycloïde ayant les mêmes points de rebroussement.*

En effet, soit C le cercle dont le point M engendre l'hypocycloïde et soit C′ le cercle symétrique de C par rapport à la tangente en A, point de contact du cercle C et du cercle fixe; le point M′ symétrique de M décrit l'épicycloïde. Le cercle de centre A et de rayon $AM = AM'$ est tangent aux deux courbes.

Un autre cas particulier simple est celui où le cercle C est égal au cercle fixe. L'épicycloïde est alors une cardioïde.

Autres solutions par MM. Agronomof, Bouvaist, Duby, Giraudon, Klug, P. de Lépinay, Lez, Pélissier, Vaulot.

2124.

(1909, p. 143.)

Si S_1, S_2, S_3 *sont les sommes des termes d'une progression arithmétique quelconque, de leurs carrés et de leurs cubes, on a toujours*

$$9 S_2^2 > 8 S_1 S_3.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION,

PAR M. A. DUBY.

Soient

$$a,\quad b,\quad c,\quad \ldots,\quad l$$

n termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison r.

On trouve facilement, par la méthode classique,

$$S_1 = \frac{n}{2}[(n-1)r + 2a],$$

$$S_2 = \frac{n}{6}[(n-1)(2n-1)r^2 + 6a(n-1)r + 6a^2]$$

$$S_3 = \frac{n}{4}[n(n-1)^2r^3 + 2a(n-1)(2n-1)r^2 + 6a^2(n-1)r + 4a^3].$$

En portant ces valeurs dans l'inégalité à démontrer

$$9S_2^2 > 8S_1S_3$$

il vient finalement, après réductions,

$$(n-1)^2r^4 - 4a(n-1)^2r^3$$
$$+ 4a^2(n-1)(n-2)r^2 + 8a^3(n-1)r + 4a^4 > 0,$$

c'est-à-dire

$$[(n-1)r^2 - 2a(n-1)r - 2a^2]^2 > 0,$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Autres solutions de Mlle A.-D. BETTS, MM. AGRONOMOF, BOUVAIST, GIRAUDON, RODRIGO RAVOSCO.

2125.

(1909, p. 144.)

Si deux triangles sont tels que leurs côtés se coupent deux à deux orthogonalement en trois points situés sur *une même droite, cette droite passe par le milieu du segment limité par les orthocentres des deux triangles.*

(Jan de Mezeas.)

Solution,

Par M. L. Klug.

Soient a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 les côtés des deux triangles, se coupant deux à deux orthogonalement sur la droite t. Les cercles circonscrits aux trois triangles b_1c_1t, c_1a_1t, a_1b_1t, cercles qui sont aussi circonscrits aux triangles b_2c_2t, c_2a_2t, a_2b_2t, se coupent en un point F, foyer de deux paraboles inscrites, l'une au quadrilatère $a_1b_1c_1t$, l'autre au quadrilatère $a_2b_2c_2t$.

Soit G le point symétrique du point F par rapport à la droite t, et soient H_1 et H_2 les orthocentres des deux triangles. GH_1 et GH_2 sont les directrices des deux paraboles.

Mais les deux triangles $a_1b_1c_1$ et $a_2b_2c_2$ sont semblables et ont leurs côtés homologues rectangulaires. F est leur centre de similitude, puisque les segments limités par les sommets homologues sont vus du point F sous un angle droit. FH_1 et FH_2 sont donc rectangulaires; il en est de même des directrices des deux paraboles, qui sont parallèles respectivement aux droites de Simson du point F par rapport aux deux triangles.

Il résulte de là que les quatre points F, H_1, H_2, G sont sur un cercle de diamètre H_1H_2. Par conséquent le milieu de H_1H_2, centre de ce cercle, est sur la perpendiculaire élevée à FG en son milieu, c'est-à-dire sur la droite t.

C. Q. F. D.

Autres solutions par MM. Bouvaist, Duby, Giraudon et Sondat.