H. LEBESGUE

Sur un théorème de M. R. Bricard

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 213-217

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__213_1>

[L²21c]

SUR UN THÉORÈME DE M. R. BRICARD;

PAR M. H. LEBESGUE.

M. Bricard [1] a démontré le théorème suivant :

Si une droite D *varie en touchant constamment*

(1) *Nouvelles Annales*, mars 1909.

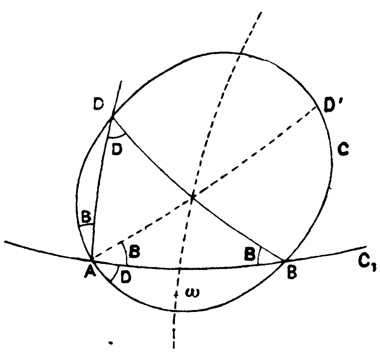
deux sphères S, S′, *les plans tangents menés par* D *aux diverses quadriques* φ *circonscrites à ces deux sphères forment un faisceau de grandeur constante.*

Les plans bissecteurs des deux plans tangents issus de D *à une même quadrique* φ *passent par les centres de similitude de* S *et* S′.

L'angle de ces deux plans est celui des plans tangents à S *et* S′ *en leurs points de contact avec une génératrice* δ *de* φ.

Cette troisième partie est due à M. M.-F. Egan[1]; elle se déduit facilement des deux premières en faisant tendre D vers δ. Pour justifier la première partie du théorème, il suffit évidemment de justifier les deux dernières; or elles résultent, on va le voir, d'un raisonnement très élémentaire.

Il me sera commode d'appeler *pseudo-triangle sphérique* la figure formée par trois arcs AB, BC, CA de cir-



conférences d'une même sphère, dont les prolongements passent par un même point I. Une inversion de centre I transformant la figure en un triangle rectiligne, on voit : que la somme des angles d'un pseudo-triangle est égale

(1) *Nouvelles Annales*, novembre 1909.

à deux droits; que la circonférence circonscrite à un pseudo-triangle coupe chaque côté sous un angle égal à l'angle opposé du pseudo-triangle. Ces propositions, dont la parenté avec le théorème de Lexell est évidente, résultent aussi de suite du fait que deux circonférences d'une même sphère se coupent sous le même angle en leurs deux points de rencontre.

Deux arcs de circonférences C et C_1, tracés sur une sphère et joignant deux points A, B, constituent ce que nous appellerons un *pseudo-fuseau* de sommet AB; ses bissectrices seront les grands cercles passant soit par A, soit par B, et divisant en deux parties égales les angles au sommet. Ces quatre bissectrices sont deux à deux symétriques par rapport au plan diamétral perpendiculaire à AB; elles se coupent deux à deux en quatre points du grand cercle Σ contenu dans ce plan; on appelle ces points les *quatre centres de similitude sphérique des circonférences* C *et* C_1. Ce sont les points de rencontre de Σ avec les grands cercles tangents à la fois à C et C_1; on le voit, par exemple, en remarquant qu'une inversion ayant un des centres de similitude pour pôle, transforme les bissectrices qui y passent en des droites coupant sous le même angle les transformées de C et C_1 et passant par le transformé du centre de similitude diamétralement opposé.

Dans le cas d'un véritable fuseau, il n'y a plus que deux bissectrices.

Considérons deux circonférences C *et* C_1 *d'une sphère* O; *elles décomposent cette sphère en quatre pseudo-fuseaux de sommets* A *et* B.

Soit D *l'un des deux points de* C *tel que le point* D_1, *diamétralement opposé à* D, *soit sur* C_1. *Les deux grands cercles* DAD_1, DBD_1 *partagent la sphère* O *en quatre fuseaux.*

En chacun des quatre centres de similitude sphérique de C *et* C_1 *concourent deux bissectrices des pseudo-fuseaux* AB *et une bissectrice des fuseaux* DD_1. *Un pseudo-fuseau* AB *et le fuseau* DD_1 *contenant le même centre de similitude sont égaux.*

Σ étant le grand cercle contenant les pôles de C et C_1, soit AD′ le grand cercle symétrique de BD par rapport à Σ. Puisque la figure formée par les arcs AD, DB, AB des circonférences ADD_1, BDD_1, C_1 est un pseudo-triangle inscrit dans C, on a les égalités d'angles indiquées sur la figure. Il en résulte que les bissectrices passant par A des pseudo-fuseaux AB sont aussi les bissectrices des fuseaux déterminés par les grands cercles AD et AD′. Par suite, si ω est un centre de similitude de C et C_1, ω est également distant des grands cercles AD et AD′; d'autre part, il est évidemment également distant de AD′ et de BD, donc il est également distant des deux grands cercles AD, BD, et par suite est sur l'une des bissectrices des fuseaux DD_1. C'est la première partie du théorème; la seconde résulte des égalités d'angles déjà invoquées (1).

Pour obtenir le théorème de M. Bricard, il suffit de prendre la droite D figurant dans l'énoncé de ce théo-

(1) Ce théorème est une généralisation du théorème déjà utilisé sur l'égalité des angles d'un triangle rectiligne avec ceux sous lesquels la circonférence circonscrite au triangle coupe les côtés de ce triangle et du fait que les bissectrices du triangle passent par les milieux des arcs sous-tendus par les côtés. On peut aussi la considérer comme la généralisation des propriétés du contre-parallélogramme rectiligne. Pour cela, appelons *contre-parallélogramme sphérique* la figure formée par quatre grands cercles deux à deux symétriques par rapport à un grand cercle Σ. Les grands cercles AD, DB, BD′, D′A de la figure forment un contre-parallélogramme sphérique dont les huit sommets sont les points A, B, D, D′ et les

rème pour le rayon OD du théorème précédent. O sera le point de rencontre de D avec celle des quadriques φ que l'on considère. OA et OB seront les deux génératrices de φ passant par O. Le rayon de la sphère O sera quelconque. Les cônes de révolution de sommet O et de directrices C et C_1 sont circonscrits à S et S'; les droites joignant O aux centres de similitude de C et C_1 passent donc par les centres de similitude de S et S'. L'angle de C et C_1 est l'angle des deux cônes de révolution, donc celui des plans tangents à S et S' en leurs points de contact avec la génératrice OA de φ. L'angle des grands cercles DOA, DOB est celui des plans tangents à φ issus de D.