

H. VILLAT

**Sur le théorème de Lagrange en
hydrodynamique**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 282-284

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__282_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[S2a]

SUR LE THÉORÈME DE LAGRANGE EN HYDRODYNAMIQUE:

PAR M. H. VILLAT.

On sait que le théorème de Lagrange relatif au mouvement des fluides parfaits est ainsi conçu :

Supposons que dans le fluide en mouvement il existe un potentiel uniforme $Q(x, y, z, t)$ pour les accélérations. Dans ces conditions, si les tourbillons sont nuls à un instant déterminé $t = 0$, ils seront nuls à tout instant t .

La démonstration suivante, presque intuitive, et que je crois nouvelle, présente peut-être quelque intérêt.

Prenons les variables de Lagrange. Soient a, b, c , les coordonnées initiales d'un élément fluide à l'instant $t = 0$; soient

$$x = f(a, b, c, t), \quad y = g(a, b, c, t), \quad z = h(a, b, c, t)$$

les coordonnées du même élément à l'instant t .

Désignons enfin par u, v, w les projections de la vitesse de cet élément au même instant t . On sait qu'on a pendant toute la durée du mouvement

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

(cf. APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. III, n° 729).

Ceci posé, dire que les tourbillons sont nuls à l'instant t est équivalent à la condition suivante : à cet instant, pour toute ligne L fermée prise dans le fluide,

l'intégrale

$$J = \int_L u \, dx + v \, dy + w \, dz$$

est nulle.

Soit L_0 la position de la ligne fluide L , dont on suivra la déformation avec le temps, à l'instant $t = 0$. Par hypothèse, l'intégrale précédente est nulle pour $t = 0$ quelle que soit la ligne L_0 fermée considérée à cet instant dans le fluide.

Appelons s un paramètre propre à fixer la position du point (abc) sur la ligne L_0 , et variant de zéro à S lorsque ce point décrit cette ligne en entier. Par exemple s sera l'arc de la courbe L_0 compté à partir d'une origine arbitraire, et S sera la longueur de la courbe tout entière. Quand s variera de zéro à S le point (xyz) décrira la ligne fluide fermée L . Nous désignerons par x'_s, y'_s, z'_s les dérivées de x, y, z , par rapport au paramètre s , dont ils sont fonctions par l'intermédiaire de a, b, c .

On peut alors écrire

$$J = \int_0^S (u x'_s + v y'_s + w z'_s) \, ds.$$

Nous allons faire voir que la dérivée $\frac{dJ}{dt}$ de J , par rapport au temps, est toujours nulle. Il en résultera que l'intégrale J sera constante, et par suite qu'elle sera toujours nulle, puisqu'elle est nulle pour $t = 0$. Le théorème de Lagrange sera alors démontré.

On a

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = & \int_0^S \left(\frac{du}{dt} x'_s + \frac{dv}{dt} y'_s + \frac{dw}{dt} z'_s \right) ds \\ & + \int_0^S \left(u \frac{dx'_s}{dt} + v \frac{dy'_s}{dt} + w \frac{dz'_s}{dt} \right) ds. \end{aligned}$$

Mais il vient, d'après (1),

$$\begin{aligned} & \int_0^S \left(\frac{du}{dt} x'_s + \frac{dv}{dt} y'_s + \frac{dw}{dt} z'_s \right) ds \\ &= \int_0^S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} x'_s + \frac{\partial Q}{\partial y} y'_s + \frac{\partial Q}{\partial z} z'_s \right) ds = \int_{\mathbf{L}} dQ = 0. \end{aligned}$$

Puis on peut écrire

$$\frac{dx'_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial s},$$

et de même

$$\begin{aligned} \frac{dy'_s}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \frac{dz'_s}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial s}. \end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^S \left(u \frac{dx'}{dt} + v \frac{dy'}{dt} + w \frac{dz'}{dt} \right) ds \\ & \int_0^S \left(u \frac{dx'_s}{dt} + v \frac{dy'_s}{dt} + w \frac{dz'_s}{dt} \right) ds \\ &= \int_0^S \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + w \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds = \frac{1}{2} \left[u^2 + v^2 + w^2 \right]_0^S = 0. \end{aligned}$$

En revenant à (2), on voit bien qu'on a $\frac{dJ}{dt} = 0$, et le théorème est démontré.
