NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 286-288
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__286_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2126

(1909, p. 192.)

Soient a, b, c, d les points de Frégier situés sur les normales PA, PB, PC, PD, *menées du point* P *à une conique* (C).

L'hyperbole équilatère passant par a, b, c, d rencontre la conique (C) *en quatre points* A′, B′, C′, D′, *où les normales à la conique* (C) *sont concourantes en un point* P′. *Les points de Frégier a', b', c', d' situés sur les normales* P′A′, P′B′, P′C′, P′D′ *sont sur l'hyperbole d'Apollonius relative à* P.

(Georges Cuny.)

Solution,

Par M. E.-N. Barisien.

Supposons que la conique donnée est l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées de A, B, C, D ; (α, β) celles de P ; (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3), (x'_4, y'_4) les coordonnées de A′, B′, C′, D′ ; (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_4, Y_4) les coordonnées des points de Frégier relatifs à A, B. C, D ; (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2), (X'_3, Y'_3), (X'_4, Y'_4) les coordonnées des points de Frégier a', b', c', d'.

On sait que les coordonnées du point de Frégier a sont, en fonction de celles de A,

$$(1) \qquad X_1 = \frac{c^2}{a^2+b^2}x_1, \qquad Y_1 = -\frac{c^2}{a^2+b^2}y_1.$$

L'hyperbole d'Apollonius relative à P a pour équation

$$(2) \qquad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

On a donc

$$(3) \qquad c^2 x_1 y_1 + b^2 \beta x_1 - a^2 \alpha y_1 = 0.$$

Mais de (1) on tire

$$x_1 = \frac{(a^2 + b^2)}{c^2} X_1, \qquad y_1 = -\frac{(a^2 + b^2)}{c^2} Y_1.$$

Ces valeurs étant substituées dans (3), il en résulte

$$(a^2 + b^2) X_1 Y_1 - b^2 \beta X_1 - a^2 \alpha Y_1 = 0.$$

Donc, chacun des quatre points tels que (X_1, Y_1) est situé sur l'hyperbole équilatère

$$(4) \qquad (a^2 + b^2) XY - b^2 \beta X - a^2 \alpha Y = 0.$$

Cette hyperbole peut être assimilée à une hyperbole d'Apollonius relative à un point $P'(\alpha', \beta')$, dont l'équation est

$$(5) \qquad c^2 XY + b^2 \beta' X - a^2 \alpha' Y = 0.$$

En effet, si l'on identifie (4) et (5), il vient

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} = \frac{\beta'}{-\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Les coordonnées du point P' sont donc, en fonction de celles de P,

$$(6) \qquad \alpha' = \frac{\alpha c^2}{a^2 + b^2}, \qquad \beta' = -\frac{\beta c^2}{a^2 + b^2}.$$

On a pour un point (x'_1, y'_1), d'après (5),

$$(7) \qquad c^2 x'_1 y'_1 + b^2 \beta' x'_1 - a^2 \alpha' y'_1 = 0.$$

Or,

$$X'_1 = \frac{c^2}{a^2 + b^2} x'_1, \qquad Y'_1 = -\frac{c^2}{a^2 + b^2} y'_1,$$

$$x'_1 = \frac{(a^2 + b^2) X'_1}{c^2}, \qquad y'_1 = -\frac{(a^2 + b^2) Y'_1}{c^2}.$$

En portant ces valeurs dans (7), cette équation devient

$$(8)\qquad (a^2+b^2)^2 X'_1 Y'_1 - b^2 c^2 \beta X'_1 + a^2 c^2 \alpha Y'_1 = 0.$$

Ceci montre que les points a', b', c', d' sont situés sur l'hyperbole

$$(9)\qquad (a^2+b^2)^2 X' Y' - b^2 c^2 \beta X' + a^2 c^2 \alpha Y' = 0.$$

Ce n'est pas l'hyperbole d'Apollonius relative à P, comme le dit l'énoncé. Mais on peut l'identifier avec l'hyperbole d'Apollonius relative à un point $P''(\alpha'', \beta'')$

$$(10)\qquad c^2 X' Y' + b^2 \beta'' X' - a^2 \alpha'' Y' = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{c^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{\beta''}{-c^2\beta} = \frac{-\alpha''}{c^2\alpha}.$$

Donc l'hyperbole (9) rencontre l'ellipse en quatre points A'', B'', C'', D'' où les normales à l'ellipse sont concourantes en P'', dont les coordonnées sont

$$\alpha'' = -\frac{c^4\alpha}{(a^2+b^2)^2}, \qquad \beta'' = -\frac{c^4\beta}{(a^2+b^2)^2}.$$

Autre solution par M. Bouvaist.