NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. ALEZAIS

Sur l’allure d’une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 289-302

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__289_0>

[O3e]

SUR L'ALLURE D'UNE COURBE;

Par M. R. ALEZAIS.

Ce qu'il y a d'essentiel dans cette question est bien connu et se trouve clairement exposé dans nombre d'ouvrages; mais, pour caractériser l'allure, on est amené à faire certaines conventions, et tous les auteurs ne font pas les mêmes. Mon but, dans cette Note, est de rapprocher et de comparer ces différentes manières de procéder. Comme je ne me propose pas de refaire la théorie, je me contenterai de rappeler sommairement l'état de la question, et je ne considérerai que le cas d'un arc de courbe sans point singulier ni point stationnaire.

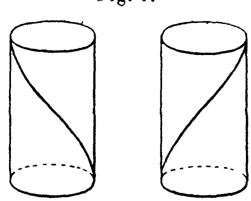
Quand une courbe n'est pas plane, un quelconque de ses arcs MM' n'est pas tout entier dans le plan osculateur à l'une de ses extrémités M; si les conditions voulues de continuité sont réalisées et si l'arc est suffisamment petit, le point qui parcourt l'arc de M en M' va toujours en s'éloignant du plan osculateur en M, mais il peut s'éloigner d'un côté ou de l'autre, et ainsi l'arc peut affecter deux formes. C'est cette manière d'être, susceptible de deux déterminations et de deux seulement, qui s'appelle l'allure de l'arc de courbe.

En dehors de toute convention, on peut caractériser l'allure par le sens dans lequel un observateur placé à l'une des extrémités de l'arc voit tourner la binormale quand le point se rapproche de lui en parcourant l'arc. Il est facile de se rendre compte que l'apparence ne change pas quand l'observateur se place successivement aux deux extrémités de l'arc; on pourra donc définir l'allure d'un arc très petit en disant qu'un observateur placé à l'une de ses extrémités voit tourner la binormale dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens inverse des aiguilles d'une montre quand le point se rapproche de lui en suivant l'arc (1).

Il est d'usage d'appliquer aux deux allures les mots *dextrorsum* et *sinistrorsum ;* mais ici commence la divergence. Des deux manières de faire correspondre les deux mots aux deux allures, l'une, d'après M. v. Mangoldt (*Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, III, D. 1, 2. Note 180), est d'usage en technique et l'autre en botanique, mais les mathématiciens ne sont pas d'accord.

Pour les botanistes l'arc est dextrorsum si la binormale s'avance vers l'observateur en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, sinistrorsum quand elle s'avance en tournant en sens inverse. C'est le contraire en technique et aussi en physique. J'appellerai les deux usages *l'usage de la Botanique* et *l'usage de la Physique*.

Fig. 1.



Spire d'hélice dextorsum.

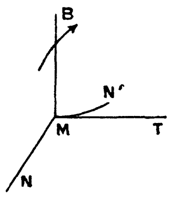
Usage de la Botanique. Usage de la Physique.

(1) *Cf.* De la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 281.

La figure, où je suppose que les cylindres tournent vers l'observateur leur convexité, applique ces dénominations à une spire d'hélice.

Soient M un point de la courbe ; x, y, z ses coordonnées exprimées en fonction d'un paramètre ; Mt la tangente en M prise dans un sens déterminé arbitraire ; je supposerai que c'est le sens où le paramètre croît ; MN la normale principale dirigée vers le centre de courbure et MB la binormale choisie de manière que le trièdre MtNB soit orienté comme le trièdre de réfé-

Fig. 2.



rence Oxyz. J'appellerai *positives* par rapport à un trièdre quelconque Oxyz, les rotations qui amènent Ox sur Oy, Oy sur Oz, Oz sur Ox. Dans ces conditions, la rotation de la binormale, dont j'ai parlé plus haut et qu'on peut considérer comme une rotation instantanée autour de la tangente en M, sera positive ou négative par rapport au trièdre MtNB suivant que le déterminant des points stationnaires

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

(qui n'est pas nul par hypothèse) sera lui-même positif ou négatif. On se rend compte de ceci en remarquant d'abord que Δ est la limite pour $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ de

$\frac{\Delta_1}{h_1^3 h_2^2 h_3}$, en posant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

et en supposant que, x, y, z correspondant à la valeur t du paramètre, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) sont trois points de la courbe correspondant aux valeurs $t + h_1$, $t + h_1 + h_2$, $t + h_1 + h_2 + h_3$ avec h_1, h_2, h_3 positifs et très petits. Il n'y a plus ensuite qu'à transporter $Oxyz$ sur $MtNB$. Les deux trièdres ayant même orientation, Δ_1 n'aura pas changé de signe ; il aura d'ailleurs pris la forme

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

avec x_1 et y_2 positifs. Δ_1 est maintenant du signe de z_3, or z_3 positif correspond manifestement à une rotation positive de la binormale autour de la tangente.

Le signe de Δ est donc intimement lié au sens de la rotation qui nous a servi à définir l'allure. Toutefois, il s'est agi dans cette définition de l'aspect qu'offre cette rotation à un observateur placé dans une position particulière ; or, cet aspect, pour une rotation de signe déterminé, change avec l'orientation des axes. Il est donc nécessaire de définir cette orientation.

Je dirai avec M. Kneser (*Journal de Crelle*, t. 113, *Bemerkungen über die Frenet-Serretschen Formeln*, p. 100) que le trièdre $Oxyz$ est orienté *est-sud-zénith* ou *ouest-sud-zénith* suivant que Ox se dirige vers l'est ou vers l'ouest, quand on a placé le plan zOy dans le méridien avec Oz dirigé vers le zénith et Oy dirigé vers le sud.

Supposons le trièdre est-sud-zénith, si l'arc MM' est au-dessus du plan osculateur, ce qui, nous l'avons vu, correspond à $\Delta > 0$, la binormale vue de M' paraîtra tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, quand le point décrivant ira de M en M'. Ceci suffit à établir la correspondance suivante entre les signes de Δ et les allures.

Usage de la Botanique.

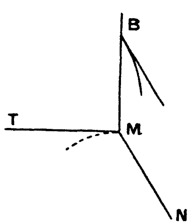
	$\Delta > 0$.	$\Delta < 0$.
Trièdre est-sud-zénith.....	*dextrorsum*	*sinistrorsum*
Trièdre ouest-sud-zénith...	*sinistrorsum*	*dextrorsum*

Usage de la Physique.

	$\Delta > 0$.	$\Delta < 0$.
Trièdre est-sud-zénith.....	*sinistrorsum*	*dextrorsum*
Trièdre ouest-sud-zénith...	*dextrorsum*	*sinistrorsum*

C'est le plus souvent d'après le signe du rayon de torsion T que l'on caractérise l'allure ; T est relié à Δ

Fig. 3.



et aux coefficients A, B, C du plan osculateur par la formule

$$T = \pm \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta},$$

mais certains auteurs prennent le signe $+$ et font $\Delta T > 0$; d'autres prennent l'autre signe et font $\Delta T < 0$; il y a donc huit combinaisons possibles ; voici le tableau des correspondances entre le signe de T et l'allure dans chacune d'elles.

$\Delta T > 0$:

		Dextrorsum.	*Sinistrorsum.*
Trièdre est-sud-zénith...	I. Botanique.	$T > 0$	$T < 0$
	I'. Physique..	$T < 0$	$T > 0$
Trièdre ouest-sud-zénith.	II. Botanique.	$T < 0$	$T > 0$
	II'. Physique..	$T > 0$	$T < 0$

$\Delta T < 0$:

		Dextrorsum.	*Sinistrorsum.*
Trièdre est-sud-zénith...	III. Botanique.	$T < 0$	$T > 0$
	III'. Physique..	$T > 0$	$T < 0$
Trièdre ouest-sud-zénith.	IV. Botanique.	$T > 0$	$T < 0$
	IV'. Physique..	$T < 0$	$T > 0$

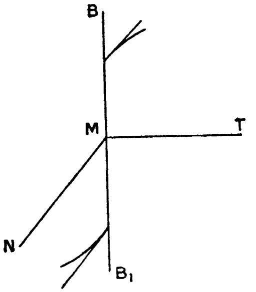
On écrit $T = \frac{ds}{d\tau}$ en appelant s l'arc de la courbe et τ l'arc de l'indication sphérique de la torsion. On prend en général ds positif. Quant au sens des arcs croissants sur l'indicatrice, on est libre, assurément, de le choisir comme on l'entend, et c'est ce qui explique que l'on ait pu adopter soit l'un des quatre premiers systèmes, soit l'un des quatre derniers.

Quelques auteurs font peu usage de l'indicatrice; ils envisagent $d\tau$ comme la rotation infiniment petite de MB autour de Mt; ils sont ainsi amenés à prendre T positif quand cette rotation est positive et, par suite, d'après ce que j'ai dit plus haut, à prendre T et Δ de même signe.

C'est le cas de Frenet dans l'article où il a publié ses fameuses formules (*Journal de Liouville*, t. XVII, 1852, p. 437). Il montre d'ailleurs le lien entre le signe de T et les deux manières de tourner du plan osculateur, mais sans caractériser autrement l'allure.

M. Jordan (*Traité d'Analyse*, 2e éd., t. I, p. 465 et 470) et M. Humbert (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 399

Fig. 4.



et 403) font aussi l'hypothèse $\Delta T > 0$, et ils écrivent les formules de Frenet comme Frenet lui-même les a écrites, mais ils ne parlent pas explicitement de l'allure.

M. Kneser, dans son article du *Journal de Crelle* cité plus haut, traite au contraire cette question *ex-professo*. Il suppose $\Delta T > 0$ et il en donne la raison que je viens de rappeler ; avec Gauss et Möbius, il oriente son trièdre ouest-sud-zénith ; il suit l'usage de la Physique ; il est donc dans le système II' et il conclut à *rechts gewunden* pour $T > 0$ et à *links gewunden* pour $T < 0$.

M. v. Mangoldt, dans l'*Encyclopédie* (III D 1, 2, p. 77), considère toutes les dispositions de M. Kneser comme les plus usuelles, tout en remarquant qu'elles ne sont pas universellement adoptées.

Les autres auteurs qui, à ma connaissance, traitent complètement la question, supposent $\Delta T < 0$, et ils écrivent les formules de Frenet comme Serret les a écrites. Pour eux, $d\tau$ n'est plus une rotation infiniment petite, mais le déplacement infiniment petit du point qui décrit l'indicatrice de la torsion ; comme ce déplacement a lieu suivant une droite parallèle à la normale principale, ils le considèrent comme positif quand il se fait dans la direction positive de cette normale ; cette direction positive correspond à une rotation négative autour de la tangente ; ils sont amenés à prendre Δ et T de signes contraires.

M. Goursat (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 537) oriente le trièdre ouest-sud-zénith, et il suit l'usage de la Botanique (système IV) ; il conclut à dextrorsum pour $T > 0$ et à sinistrorsum pour $T < 0$.

M. Raffy (*Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse*, p. 72 et 89) et M. de la Vallée-Poussin (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 280 et 282) orientent le trièdre est-sud-zénith, ils suivent l'usage de la Physique (système III') ; ils concluent comme les auteurs précédents.

M. Scheffers (*Einführung in die Theorie der Curven*, t. I, p. 181 et 200) fait les mêmes hypothèses, sauf qu'il suit l'usage de la Botanique (système III) et il conclut par suite à *rechts gewunden* pour $T < 0$ et à *links gewunden* pour $T > 0$.

M. Bianchi (*Lezioni di Geometria differenziale*, 1re éd., p. 10-12), qui, lui aussi, supppose $\Delta T < 0$ et qui applique les mots *destrorsa* et *sinistrorsa* à la manière de la Physique, conclut, comme M. Scheffers, à *destrorsa* pour $T < 0$ et à *sinistrorsa* pour $T > 0$. Pour être conséquent avec lui-même, il doit orienter son trièdre ouest-sud-zénith et se trouver dans le système IV'. Voici comment il explique son orientation : *Supposons*, dit-il, *que sur la face positive du plan xy* *la direction positive* Ox *se trouve à droite par rapport à* Oy. — Ceci correspond, en effet, à l'orientation ouest-sud zénith, à la condition de supposer que l'observateur qui regarde Ox est debout sur la face positive du plan xy en un point de la partie négative de Oy. Il est à remarquer que la première édition de l'Ouvrage de M. Bianchi porte la même date, 1894, que le Tome 113 du *Journal de Crelle* où se trouve l'article de M. Kneser et que tous les autres Ouvrages qui traitent à fond la question sont postérieurs.

Serret, à qui nous devons l'indicatrice (¹), ainsi que notre manière d'écrire les formules de Frenet (*Journal de Liouville*, t. XVI, p. 193 et *Cours de calcul différentiel et intégral,* 2ᵉ éd., t. I, p. 408) considérait T comme une quantité essentiellement positive. Les auteurs qui sont venus peu après lui ont fait de même.

C'est le cas de Salmon (*Géométrie à trois dimensions,* 2ᵉ partie, p. 135). Tout en donnant l'interprétation géométrique de Δ, il n'en tire aucune conséquence pour l'allure de la courbe.

De même, Gilbert (*Cours d'Analyse*, 4ᵉ éd., p. 249) veut qu'on prenne le signe de l'équation de T de manière que cette expression soit positive. Il est à remarquer qu'il écrit néanmoins les formules de Frenet comme Frenet lui-même.

Bertrand (*Calcul différentiel*, p. 622 et 624) écrit toutes les formules comme Serret, mais sans dire explicitement s'il considère ou non T comme une quantité positive.

De même Hoüel (*Cours de calcul infinitésimal*,

(¹) La première idée est due à Euler. *Cf.* V. Kommerel, dans *Vorlesungen über Geschichte der Math.*, von M. Cantor, 4ᵉ vol., p. 526-527.

t. II, p. 142) écrit

$$T = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta},$$

sans insister sur le signe. Il ne donne pas les formules de Frenet, mais il propose un exercice (n° **13**, p. 275) qui suppose qu'il les écrit comme Serret.

M. Jordan, dès sa première édition, t. I, 1882, p. 272 et 278-279) écrit très correctement les formules comme Frenet, mais il ne justifie pas le choix de son signe dans l'expression de T.

Le premier qui a bien mis en évidence que les formules de Frenet écrites à la manière de Serret (en supposant le trièdre MtNB orienté comme celui des axes et T grandeur algébrique) entraînent

$$\Delta T = -(A^2 - B^2 + C^2),$$

est M. Laurent en 1887 (*Traité d'Analyse,* t. II, p. 373).

La même année M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. I, p. 10) a mis le même fait en évidence en remarquant que, dans les mêmes conditions, la torsion est du signe contraire de la composante de la rotation autour de la tangente.

M. Königs (*Leçons de Cinématique*, p. 125) reproduit le calcul de M. Darboux. Dans l'étude des mouvements hélicoïdaux (p. 103), il oriente le trièdre est-sud-zénith et suit l'usage de la Botanique.

En 1891, M. Picard (*Traité d'Analyse,* 1e éd., t. I, p. 365-366) fait seulement remarquer qu'il faut que le signe de T soit choisi d'une manière convenable pour que les formules de Serret soient vérifiées.

Vinrent ensuite l'article de M. Kneser et l'Ouvrage de M. Bianchi, si précis sur la question ; néanmoins quelques auteurs postérieurs l'ont de nouveau laissée indécise.

MM. Rouché et Lévy (*Analyse infinitésimale*, t. I, p. 415 et 420) donnent un double signe à l'expression de T ; ils écrivent les formules de Frenet comme Frenet et ne parlent pas de l'allure.

M. Niewenglowski (*Cours de Géométrie analytique*, t. III, p. 116 et 119) donne en grandeur et *en signe*

$$\Delta T = \frac{1}{R^2},$$

et néanmoins il propose comme exercice d'établir les formules de Frenet écrites à la manière de Serret.

M. Pascal (*Repertorium*, éd. allemande, t. II, p. 459-460) écrit de même les formules de Frenet et ne donne que l'expression irrationnelle de T. Il n'introduit les mots *rechts gewunden* et *links gewunden* qu'à propos de l'hélice (p. 552) et il suit l'usage de la Physique.

M. Appell (*Éléments d'Analyse,* 2e éd., p. 382) est revenu au système de Serret ; non seulement il écrit comme lui les formules de Frenet, mais il suppose T essentiellement positif. Toutefois, au lieu d'orienter le trièdre MtNB comme celui des axes, il choisit son orientation de manière à pouvoir en déduire l'allure de la courbe.

Il résulte du premier des tableaux dressés plus haut, que si, comme fait M. Appell, on se sert de la terminologie de la Botanique, avec $\Delta < 0$, dextrorsum correspond à l'orientation ouest-sud-zénith. On remarque que dans ces conditions, la tangente à l'indicatrice sphérique de la torsion a même sens que la normale principale. En d'autres termes, les tangentes aux deux indicatrices sphériques de la torsion et de la courbure sont parallèles et de même sens. Avec $\Delta > 0$, dextrorsum correspond au contraire à l'orientation est-sud-zénith et les tangentes aux deux indicatrices sphériques sont de sens contraires. Mais si, dans ce dernier cas, on convient de prendre pour binormale l'autre direction de la perpendiculaire au plan tMN, le trièdre sera de nouveau orienté ouest-sud-zénith et les tangentes aux deux indicatrices seront de nouveau parallèles et de même sens. On voit donc que si, au lieu d'orienter MtNB comme $Oxyz$, on convient de le construire de manière que les tangentes aux deux indicatrices sphériques soient de même sens, dextrorsum (usage de la Botanique) correspondra toujours à l'orientation est-sud-zénith.

Ce système, qui peut être avantageux dans certains cas, par exemple pour l'hélice circulaire qui garde même allure dans toute sa longueur, ne sera sans doute pas préféré en général pour une courbe unicursale pour laquelle T lui-même étant rationnel, il est commode de se rendre compte des changements d'allure par les changements de signe de T à mesure que le paramètre varie.

Ceci me paraît vrai *a fortiori* du système imaginé par M. R. v. Lilienthal (*Note zur Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Ebene. Math. Annalen*, t. XLII, p. 497) et appliqué par lui aux directions principales d'une courbe et aux rayons de courbure et de torsion ; système qui consiste à déterminer sans ambiguïté comme grandeur algébrique la distance de deux points quelconques et la distance d'un point à un plan, en prenant pour règle invariable que la direction positive d'une droite à partir d'un point de cette droite est, si la droite n'est pas perpendiculaire à Oz, celle qui fait un angle aigu avec Oz; si la droite est perpendiculaire à Oz mais non perpendiculaire à Oy, celle qui fait un angle aigu avec Oy et si la droite est parallèle à Ox, celle qui coïncide avec la direction positive à Ox. Dans ce système, il pourra y avoir des signes à changer dans les formules toutes les fois que l'un des axes du trièdre $MtNB$ passera par une position perpendiculaire à Oz. Il est donc probable que l'on continuera généralement, au moins dans l'étude des courbes à représentation paramétrique rationnelle, à supposer $MtNB$ orienté comme $Oxyz$ et à considérer T comme une quantité algébrique.

Reste alors à choisir entre les huit systèmes indiqués plus haut, dont cinq ont été adoptés par des auteurs. Ce choix importe en somme assez peu et l'expérience montre que là où nul intérêt essentiel n'est en jeu, l'habitude a plus de force que les raisons les plus spécieuses. Sans sortir de la question qui nous occupe, nous en avons une preuve dans l'histoire des noms *binormale* et *torsion*. De Saint-Venant, dans son Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique* (30e cahier, 1845) introduit le premier de ces noms pour désigner la perpendiculaire au plan osculateur, simplement *parce qu'on ne lui a pas encore donné de nom et qu'elle est normale à deux éléments consécutifs à la fois*. Cette dénomination a été universellement adoptée, et Français, Allemands, Italiens et Anglais lui en font honneur. A la fin de ce même Mémoire, de Saint-Venant consacre une note de plus de dix pages à montrer combien les noms de torsion, seconde courbure ou flexion sont inopportuns et, par des raisons qui semblent convaincantes, il montre que *cambrure* serait préférable. Néanmoins, torsion est resté en usage et je n'ai rencontré *cambrure* que dans le *Cours de calcul différentiel et intégral* de M. Haag

(1893, p. 237) qui, d'ailleurs, ne nomme point de Saint-Venant. Je n'ai pour mon compte aucune raison convaincante à offrir sur la question actuelle, mais seulement quelques remarques.

Je ne vois pas que l'un des deux usages, celui de la Physique ou celui de la Botanique, soit plus fondé que l'autre sur la nature des choses; par suite, il me paraîtrait avantageux d'attacher, ainsi que fait M. Königs (*Cinématique*, p. 104), les mots *dextrorsum* et *sinistrorsum* aux mots positif et négatif; de sorte que, un mouvement hélicoïdal résultant d'une translation le long d'un axe et d'une rotation autour de cet axe et la rotation étant supposée positive, ce mouvement serait *dextrorsum* ou *sinistrorsum* suivant que la translation serait positive ou négative. Dans ce système, le choix de l'usage serait corrélatif du choix de l'orientation; si l'on oriente le trièdre est-sud-zénith, on prendra l'usage de la Botanique, si l'on oriente ouest-sud-zénith, on prendra l'usage de la Physique. Les systèmes I′, II, III′, IV seront ainsi éliminés.

En France, en dehors de l'Astronomie, l'orientation est-sud-zénith est de beaucoup la plus usuelle; il n'y aura donc plus à choisir qu'entre les systèmes I et III.

D'après M. Darboux (¹) le système I serait préférable : d'abord il fait correspondre dextrorsum à $T > 0$, ensuite il considère $d\tau$ comme une rotation autour de la tangente, ce qui me paraît plus naturel. La manière de voir, qui en fait une translation parallèle à la normale principale, repose sur l'introduction de l'indicatrice sphérique qui, si ingénieuse et si utile qu'elle soit, a quelque chose d'un peu artificiel.

(¹) *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 428, note.