NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 501-506

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__501_1>

[H9f]

SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. V. JAMET.

M. Bricard ([1]), citant un travail du regretté professeur Raffy au sujet d'une certaine catégorie de surfaces, fait allusion à l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. Parmi les jeunes gens qui lisent cette publication, il en est peut-être qui trouveront quelque intérêt à savoir comment on peut établir cette équation, et comment on peut l'intégrer.

1° Soient

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta$$

les équations d'une droite, mobile sur la surface, a, b, α, β, désignant des fonctions d'un même paramètre u.

([1]) *Nouvelles Annales*, juillet 1910.

Si l'on désigne les dérivées de ces fonctions par a', b', α', β' et si l'on différentie la première d'entre elles par rapport à x, puis par rapport à y; enfin si l'on élimine $a'z + \alpha'$ entre les deux équations obtenues, on trouve

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x}}{-a\dfrac{\partial z}{\partial y}}.$$

En traitant de la même manière la deuxième de nos équations, on trouve

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y}}{-b\dfrac{\partial z}{\partial x}}.$$

De ces deux dernières équations résultent celles-ci :

$$(a) \qquad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

et

$$(b) \qquad \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{b}{a}.$$

Différentions encore l'équation (a) par rapport à x et à y; éliminons $a'\dfrac{\partial z}{\partial x} + b'\dfrac{\partial z}{\partial y}$ entre les deux équations obtenues, et tenons compte de l'équation (b); nous trouvons

$$\frac{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = -\frac{b}{a},$$

ou bien

$$(c) \qquad a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Traitons cette dernière équation (c) de la même manière. Nous en déduisons

$$(d)\quad a^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3a^2b\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}+3ab^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+b^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$$

Enfin l'élimination de $\frac{b}{a}$ entre les équations (c), (d) nous fait connaître l'équation cherchée sous la forme

$$(\mathrm{A})\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \end{vmatrix}=0.$$

2° Proposons-nous maintenant d'intégrer cette équation, comme si nous ne savions rien sur sa provenance. Si elle est vérifiée, il y a une solution commune aux deux équations suivantes

$$(e)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\lambda^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

$$(f)\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3\lambda\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}+3\lambda^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+\lambda^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0,$$

où l'inconnue est désignée par λ. En différentiant la première, par rapport à x et par rapport à y, on trouve

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+2\lambda\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}+\lambda^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}+2\lambda\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+\lambda^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0.$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières équations, après avoir multiplié tous les termes de la deuxième par λ, et en tenant compte de l'équation (f), on trouve encore

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) = 0.$$

De là deux hypothèses à examiner, suivant que l'un ou l'autre des deux facteurs ci-dessus est nul.

Si l'on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

l'équation (e) admet une racine double, et l'on en conclut

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

et l'intégrale qui s'ensuit est l'équation d'une surface développable.

Si, au contraire,

$$(g)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0,$$

l'intégration de cette équation linéaire conduit au résultat suivant

$$y = \lambda x + f(\lambda),$$

f désignant une fonction arbitraire.

Soit encore

$$(h)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial z}{\partial y} = \mu;$$

on trouvera, par différentiation,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial y},$$

puis, en vertu des équations (e) et (g),

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0.$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (g) montre que le déterminant fonctionnel de λ et de μ doit être nul. On en conclut

$$(k)\qquad \mu = \varphi(\lambda),$$

φ désignant encore une fonction arbitraire.

Soit enfin

$$(l)\qquad z = x\,\varphi(\lambda) + \nu$$

et par conséquent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(\lambda) + x\,\varphi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\nu}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \qquad x\,\varphi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial y}.$$

On en déduit, en tenant compte des équations (g), (h), (k),

$$0 = \frac{\partial\nu}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\nu}{\partial y},$$

puis, en comparant cette dernière équation avec (g),

$$\nu = \psi(\lambda),$$

ψ désignant une fonction arbitraire. Donc l'équation (g) devient

$$z = x\,\varphi(\lambda) + \psi(\lambda),$$

et l'intégrale cherchée résultera de l'élimination de λ entre cette dernière équation et l'équation

$$y = \lambda x + f(\lambda),$$

trouvée antérieurement. Donc enfin l'équation aux dérivées partielles (A) ne convient qu'aux surfaces réglées.