Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 569-571

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__569_0>

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Séries entières. Définition. Cercle de convergence. Continuité.*

II. *La tangente en un point* M *d'une courbe* C *rencontre l'axe* Ox *en* T. *Déterminer* C *de façon que le milieu de* MT *décrive la parabole* $y^2 = 2px$.

Construire la courbe C *lorsque la constante d'intégration est nulle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer*

1° $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-5x+6}};$$

2° $$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-5x+6}}.$$

(Novembre 1909.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — A. *On considère la fonction implicite* Z(z) *définie par l'équation*

$$\sin\frac{Z+z}{Z-z} = z.$$

1° *On pose* $Z = A + iB$, $z = a + ib$; A, B, a, b *étant réels, et l'on demande d'exprimer les relations qui lient ces quatre quantités en n'utilisant que des symboles de fonctions réelles de variables réelles;*

2° *Quels sont les points singuliers de Z; ces points sont-ils tous de même nature?*

3° *Pour une valeur z_0 de z on donne deux déterminations Z'_0, Z''_0 de $Z(z)$. Peut-on faire décrire à z un chemin continu faisant passer Z de la première détermination à la seconde? Si cela est possible, comment choisira-t-on ce chemin?*

B. *Les axes étant rectangulaires, le plan des xy étant horizontal, on considère les courbes de niveau et les courbes de plus grande pente d'une surface* S.

1° *Quelle est l'équation générale des surfaces* S *pour lesquelles les courbes de niveau sont des circonférences? De quel ordre est l'équation aux dérivées partielles caractéristique de ces surfaces? comment la formerait-on?*

2° *Quelle est l'équation générale des surfaces* S *pour lesquelles les courbes de niveau sont des circonférences et pour lesquelles les lignes de plus grande pente se projettent suivant des circonférences sur le plan des xy?*

Ces surfaces sont-elles caractérisées par une équation aux dérivées partielles?

3° *Parmi les surfaces considérées au paragraphe précédent, il y en a qui admettent une ligne de plus grande pente plane. On demande de former l'équation de ces surfaces et de les étudier.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver celles des surfaces $z = f(x, y)$ qui satisfont à l'équation*

$$p^2 x + q^2 y = 0$$

et qui passent par la courbe $y = \varphi(z)$, située dans le plan $x = 0$, qui vérifie l'équation

$$(z^2 - 3z + 2)\frac{dy}{dz} + 2y^2 - 3zy + 3z - 2 = 0,$$

et qui contient le point $x = 1, y = -1, z = 0$.

(Novembre 1909.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *On considère les courbes* (C) *qui rapportées à deux axes rectangulaires* Ox, Oz, *ont pour équation*

$$(x^2+z^2)^2-2a^2(x^2-z^2)=0,$$

a désignant une constante arbitraire :

Former l'équation différentielle des courbes (C);

Déterminer leurs trajectoires orthogonales.

Soit M *un point d'une courbe* (C), *et soient* θ *et* α *les angles que forment, avec* Ox, *le rayon* OM *et la tangente en* M *à* (C); *montrer qu'on a*

$$\alpha+\frac{\pi}{2}=3\theta.$$

Calculer le rayon de courbure en M, $R=\frac{1}{3}\frac{ds}{d\theta}$, *s désignant l'arc de la courbe.*

II. *On considère les surfaces* (S) *qui, définies en coordonnées semi-polaires* r, ω *et* z, *ont pour équation*

$$\frac{(r^2+z^2)^2}{r^2-z^2}=f(\omega),$$

$f(\omega)$ *désignant une fonction arbitraire de* ω.

Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfait la fonction z *de* r *et de* ω *qui correspond à l'une quelconque des surfaces* (S).

En supposant que $f(\omega)$ *se réduit à une constante*, $2a^2$, *on obtient une surface* (S') *de révolution autour de* Oz. *Calculer les deux rayons de courbure principaux de* (S') *en un point de la méridienne située dans le plan* $\omega=0$.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2y'''+x^2y''-2xy'+2y=\frac{1}{x^2}+4x^3\sin x+x^4\cos x.$$

(Novembre 1909.)