

TSURUICHI HAYASHI

Sur une équation indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 83-86

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__83_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[119 c]

SUR UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

PAR M. TSURUICHI HAYASHI, à Tokio.

I. A.-M. Legendre a établi dans sa *Théorie des Nombres* qu'un nombre triangulaire ne peut être égal à un cube. Il s'appuie pour cela sur l'impossibilité démontrée par lui, l'équation indéterminée

(1)
$$x^3 + y^3 = 3z^3.$$

J'établirai ici que *le quadruple d'un nombre pyramidal ne saurait être un cube*, en me servant de la même équation.

On aurait une démonstration assez simple en appliquant la condition de possibilité, trouvée par Édouard Lucas, de l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = Az^3 \quad (1).$$

J'aurai recours à une méthode plus directe, qui me semble présenter un certain intérêt.

II. Supposons que l'équation (1) soit possible; alors $x + y$ est divisible par 3, car on a

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3(x^2y + xy^2) = 3(z^3 + x^2y + xy^2).$$

Posons

$$x + y = 3k.$$

On a

$$(2) \quad x^3 + y^3 = x^3 + (3k - x)^3 = 27k^3 - 27k^2x + 9kx^2.$$

$3z^3$ est donc divisible par 9, et, par suite, z est divisible par 3.

Posons

$$(3) \quad z = 3^p h,$$

l'exposant p étant ≥ 1 , et h premier à 3.

Les nombres x, y, z peuvent être supposés premiers entre eux deux à deux; x et y sont donc premiers à 3. On a, en vertu de l'égalité (2),

$$qk(3k^2 - 3kx + x^2) = 3z^3.$$

Si donc on pose

$$(4) \quad 3z^3 = qkk',$$

k' est premier à 3, puisque x l'est aussi. Or on a, d'après (3),

$$3^{3p+1}h^3 = qkk',$$

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVII, 1878, p. 425.

(85)

k est donc divisible par 3^{3p-1} . Posons

$$k = 3^{3p-1} l \quad (l \text{ premier à } 3).$$

Il en résulte

$$h^3 = lk'.$$

Remarquons, en outre, que x est premier à k , à cause de

$$x + y = 3k.$$

Par suite, en vertu de

$$k' = 3k^2 - 3kx + x^2,$$

k' est premier à k et, par suite, à l . On doit donc avoir

$$l = l_1^3, \quad k' = k_1^3,$$

l_1 et k_1 étant premiers entre eux et premiers chacun à 3. On a donc finalement

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 3 \cdot 3k k' = 3 \cdot 3^{3p} l_1^3 k_1^3, \\ x + y &= 3k = 3^{3p} l_1^3, \quad z = 3^p l_1 k_1. \end{aligned}$$

Et d'après le résultat obtenu par Legendre et rappelé plus haut, nous pouvons affirmer qu'il est impossible de trouver pour x, y, z, p, l_1, k_1 des valeurs entières qui satisfassent les équations précédentes.

III. On peut écrire

$$x^3 + y^3 = 3 \cdot 3k k' = 3(x + y)k_1^3,$$

d'où

$$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy = qk^2 - 3x(3k - x) = 3k_1^3,$$

ce qui peut s'écrire

$$(2x - 3k)^2 + 3k^2 = 4k_1^3.$$

L'équation précédente sera satisfaite si l'on pose

$$\begin{aligned} 2x - 3k &= 2X(9Y^2 - X^2), \\ k &= 6Y(Y^2 - X^2), \\ k_1 &= X^2 + 3Y^2, \end{aligned}$$

où X et Y sont des entiers arbitraires. Or on devrait avoir, comme on l'a vu,

$$3k = 3^{3\rho} l_1^3.$$

Prenons, par exemple, $\rho = 1$. On aura

$$(7) \quad 3k = 18Y(Y^2 - X^2) = 3^3 l_1^3.$$

D'autre part, on trouve aisément

$$\begin{aligned} x &= 9Y(Y^2 - X^2) + X(9Y^2 - X^2), \\ y &= 9Y(Y^2 - X^2) - X(9Y^2 - X^2), \\ z &= 3l_1 k_1 = 3l_1(X^2 + 3Y^2). \end{aligned}$$

On voit donc que, si l'équation (7) était possible, on pourrait trouver trois nombres x , y , z , déterminés par les formules précédentes, et tels que

$$x^3 + y^3 = 3z^3.$$

Or, cette dernière équation est démontrée impossible. Il en est donc de même de l'équation (7).

IV. L'équation (7) peut s'écrire

$$4 \frac{(Y - X) X (Y + X)}{6} = l_1^3,$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} Y - X &= \alpha, & X &= \beta, \\ 4 \frac{\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{6} &= l_1^3. \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le quadruplé d'un nombre de la forme

$$\frac{\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{6}$$

ne peut être un cube.

En particulier, le quadruple d'un nombre pyramidal $\frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{6}$ ne peut être un cube.