Nouvelles annales de mathématiques

Léon Autonne

Sur une propriété des matrices linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 118-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__118_1>

[B1a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES MATRICES LINÉAIRES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

Prenons deux matrices linéaires n-aires u et v, dont une au moins, par exemple u, est invertible, $|u| \neq 0$. Nommons $\theta = uv$, $\eta = vu$, les deux matrices-produits.

On a

$$u^{-1}\theta u = u^{-1}uvu = \eta;$$

les deux matrices θ *et* η *sont semblables.*

Le raisonnement tombe lorsque ni u ni v n'est inversible; la proposition ne subsiste pas non plus, ainsi qu'on le reconnaît sur un exemple simple,

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\theta = u, \qquad \eta = 0.$$

On peut donc se poser le problème suivant : *Quelles sont les conditions* J, *nécessaires et suffisantes pour que les deux matrices-produits* θ *et* η *soient semblables ?*

Le présent travail contient la solution du problème.

On reconnaît d'abord que les deux matrices n-aires θ et η ont même polynome caractéristique ($E = n$-aire unité),

$$|\rho E - \theta| = |\rho E - \eta| = \rho^{n-h}\varphi(\rho),$$

où $\varphi(\rho)$ est un polynome de degré h, avec $\varphi(0) \neq 0$.

La réponse à la question est fournie par la proposition ci-dessous.

Théorème. — *Les conditions* J *sont les suivantes :* θ^s *et* η^s *ont même rang, pour* $s = 1, 2, \ldots, \varpi$, ϖ étant un entier positif qui ne dépasse pas $n - h$.

1° On conservera la terminologie et les notations employées dans mes précédentes recherches sur les matrices linéaires (¹).

(¹) I. *Sur les formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1905). — II. *Sur les coordonnées pluckériennes de droite dans*

Avant d'entamer la démonstration du théorème, il convient de rappeler ou d'établir quelques théories préliminaires.

2° Soient $a = (a_{\alpha\beta})$, $b = (b_{\alpha\beta})$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ deux matrices n-aires. Formons dans la matrice-produit ab, la somme des éléments principaux, c'est-à-dire situés sur la diagonale principale; cette somme est

$$\sum_{\alpha} (ab)_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}\, b_{\beta\alpha}$$

et ne change pas quand on permute α et β, c'est-à-dire a et b. Cette somme est donc la même pour les deux matrices-produits ab et ba.

3° Rangeons dans un ordre déterminé les

$$\binom{n}{m} = \frac{n\,!}{m\,!\,(n-m)\,!}$$

combinaisons de n indices pris m à m, et numérotons ces combinaisons au moyen d'un indice l variant de 1 à $\binom{n}{m}$. Associons dans la matrice n-aire a les lignes d'indices $k_1, k_2, \ldots, k_m$ et les colonnes d'indices $j_1, j_2, \ldots, j_m$ pour former un mineur de degré m

$$A_{ll'} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}.$$

l'espace à $n-1$ dimensions (*Journal de l'École Polytechnique*, 2° série, 11° cahier). — III. *Sur les matrices linéaires échangeables à une matrice donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2° série, 14° cahier). — IV. *Sur les matrices linéaires non invertibles* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1909). On renverra à la présente liste par des notations comme (*Index*, II) par exemple.

On aura la matrice

$$\binom{n}{m} - \text{aire}\,(\mathrm{A}_{ll'})\left[l'.\ l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right]$$

que j'ai nommée $\Delta_m a$ (*Index*, II, Chap. VII). On a dans ce travail établi la propriété $\Delta_m ab = \Delta_m a . \Delta_m b$.

4° Formons le polynome caractéristique $|\rho \mathrm{E} - a|$ de la matrice a, où E est la n-aire unité. Ce polynome est

$$\mathrm{F}(\rho) = \sum_{i=0}^{i=n} \rho^{n-i}(-1)^i \mathrm{Q}_i,$$

d'après des théories connues; le coefficient Q_i est la somme des éléments principaux dans la matrice $\binom{n}{i}$ — aire $\Delta_i a$ (3°).

Au lieu de a prenons le produit ab, Q_i est la somme des éléments principaux dans la matrice $\Delta_i ab = \Delta_i a . \Delta_i b$, c'est-à-dire (2°) dans la matrice $\Delta_i b . \Delta_i a = \Delta_i ba$. Donc *les deux matrices-produits ab et ba ont même polynome caractéristique.*

5° Décomposons le polynome caractéristique de la n-aire a en ses successifs (*Elementarteiler*)

$$|\rho \mathrm{E} - a| = \Pi(\rho - l)^\lambda, \qquad n = \Sigma \lambda.$$

Nommons Λ la matrice λ-aire

$$\Lambda = \begin{vmatrix} l & & & & & \\ 1 & l & & & & \\ 0 & 1 & l & & & \\ . & . & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & l \end{vmatrix},$$

qui admet le successif unique $(\rho - l)^\lambda$. Λ sera (*Index*, IV; *Préliminaires*, Chap. I) une composante de a. Soient $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ les composantes rangées dans un ordre quelconque ; la n-aire

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

sera semblable à a et sera la *forme typique de* a. On aura, pour une n-aire invertible convenable R, $\mathfrak{A} = R^{-1} a R$ et a sera *mise sous forme typique*.

La forme typique ne dépend que des successifs, qui la définissent sans ambiguïté, à l'ordre des composantes près, lequel est facultatif.

6° Supposons que la n-aire a ait une puissance nulle et que p soit l'exposant minimum tel que $a^p = 0$. Les successifs de a seront des puissances de ρ. On aura (*Index*, III, 21°)

$$\left.\begin{array}{lcc} g = g_0 \text{ fois le successif } & & \rho^{p_0} \\ g_1 & \text{»} & \rho^{p_1} \\ \dots\dots & & \dots \\ g_i & \text{»} & \rho^{p_i} \\ \dots\dots & & \dots \\ g_k & \text{»} & \rho^{p_k} \end{array}\right| \begin{array}{c} p > p_1 > \dots p_i > \dots > p_k, \\ p_0 = p, \\ n = \sum_{i=0}^{i=k} p_i g_i ; \end{array}$$

$$\gamma_i = g + g_1 + \dots + g_i ;$$

a possède γ_k successifs. Combien en possédera a^s ?

On fera usage du théorème de Bromwich (*Index*, IV ; première Partie, Chap. II). Divisons p_i par s ; nommons q_i le quotient et $t_i < s$ le reste. Le successif ρ^{p_i} de a sera remplacé dans a^s par s successifs, savoir : les $s - t_i$ successifs ρ^{q_i} et les t_i successifs ρ^{q_i+1}. Si $s > p_i$, on posera $q_i = 0$, $t_i = p_i$; a^s aura p_i successifs linéaires.

7° Nommons P_i le système des g_i successifs ρ^{p_i} et l_s le nombre des successifs de a^s. En vertu de ce qui précède, P_i fournit à l_s le contingent sg_i sans que ce contingent puisse dépasser $p_i g_i$. l_s s'obtient sans peine par un schéma très simple.

8° Traçons (le lecteur est prié de faire la figure) dans un plan p parallèles horizontales équidistantes $(1), (2), \ldots, (s), \ldots, (p)$; (2) est au-dessus de (1); (3) est au-dessus de (2), etc. Rangeons les systèmes P_ι de gauche à droite dans l'ordre croissant des indices. Faisons correspondre, à P_ι, $p_\iota g_i$ points rangés g_ι à g_ι sur les parallèles $(1), (2), \ldots, (p_i)$. On voit de suite sur le schéma que *l_s est le nombre des points du schéma situé sur la droite (s) ou au-dessous de cette droite.*

9° Posons $((s)) = l_s - l_{s-1}$ et formons la suite des entiers

$$((2)),\quad ((3)),\quad \ldots,\quad ((p)).$$

On aura

$$((2)) = ((3)) = \ldots = ((p_k)) = \gamma_k = g + g_1 + \ldots + g_k.$$

Quand s dépasse p_k, $((s))$ saute de γ_k à $\gamma_{k-1} = \gamma_k - g_k$. On a ainsi les entiers g_k et p_k.
$((p_k + 1)), \ldots, ((p_{k-1}))$ sont égaux à γ_{k-1}, mais

$$((p_{k-1} + 1)) = \gamma_{k-2} = \gamma_{k-1} - g_{k-1},$$

ce qui fournit g_{k-1} et p_{k-1} et ainsi de suite.

En définitive : *chacun des deux systèmes d'entiers $((2)), \ldots, ((p))$ et p_ι, g_ι $(i = 1, 2, \ldots, k)$ définit l'autre système sans ambiguïté.*

La connaissance des entiers $((s))$ assure celle des successifs.

La connaissance des nombres l_s assure aussi celle des successifs.

10° On vérifie sur-le-champ, sur la forme typique (5°), que chaque successif réduit d'une unité le rang d'une matrice a telle que $a^p = 0$. On a donc, pour la matrice a (6°),

$$\text{rang de } a^s = \mathrm{R}g.a^s = n - l_s.$$

Soit b une seconde n-aire, dont une certaine puissance s'annule. Si l'on a ϖ pour entier minimum tel que $a^\varpi = b^\varpi = 0$, les relations

$$\mathrm{R}g.a^s = \mathrm{R}g.b^s, \qquad s = 1, 2, \ldots, \varpi,$$

entraîneront, d'après ce qui précède, l'égalité des entiers l_s pour a et b, l'identité des successifs et enfin la similitude de a et b.

11° Nous sommes maintenant à même d'aborder la démonstration du théorème.

12° Soient les quatre n-aires u, v, $\theta = uv$, $\eta = vu$ et $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ les formes typiques (5°) de θ et η. On aura, pour des n-aires invertibles L et M convenablement choisies,

$$\begin{aligned} \theta &= \mathrm{L}^{-1}\mathfrak{A}\mathrm{L}, & \eta &= \mathrm{M}^{-1}\mathfrak{B}\mathrm{M}, \\ \mathfrak{A} &= \mathrm{UV}, & \mathfrak{B} &= \mathrm{VU}, \\ \mathrm{U} &= \mathrm{L}u\mathrm{M}^{-1}, & \mathrm{V} &= \mathrm{M}v\mathrm{L}^{-1}. \end{aligned}$$

13° θ et η ont même polynome caractéristique (4°); donc

$$|\rho\mathrm{E} - \theta| = |\rho\mathrm{E} - \eta| = \rho^{n-h}\varphi(\rho),$$

où $\varphi(\rho)$ est un polynome de degré h, avec $\varphi(0) \neq 0$. On aura pour les deux formes typiques

$$\mathfrak{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} h \\ n-h \end{array} \\ \begin{array}{cc} h & n-h \end{array} \end{array}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{array}{l} h \\ n-h \end{array} \\ \begin{array}{cc} h & n-h \end{array} \end{array}.$$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &= |\rho e_h - \mathrm{A}| = |\rho e_h - \mathrm{B}|, & |\mathrm{A}| &\neq 0, \\ \rho^{n-h} &= |\rho e_{n-h} - a| = |\rho e_{n-h} - b|, & |\mathrm{B}| &\neq 0; \end{aligned}$$

$e_h = h$-aire unité; $e_{n-h} = (n-h)$-aire unité. A et B sont invertibles tandis que $a^{\varpi} = b^{\varpi} = 0$ pour $\varpi \leq n - r$.

14° On peut écrire en toute hypothèse

$$U = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} h \\ n-h \end{array} \\ \begin{array}{cc} h & n-h \end{array} & \end{array}, \qquad V = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} h \\ n-h \end{array} \\ \begin{array}{cc} h & n-h \end{array} & \end{array},$$

U_{11}, V_{11} = matrice h-aire ; U_{22}, V_{22} = matrice $(n-h)$-aire; U_{12}, V_{12} = tableau à h lignes et $n-h$ colonnes; U_{21}, V_{21} = tableau à $n-h$ lignes et h colonnes.

15° On vérifie immédiatement que pour un entier positif s quelconque

$$(0) \qquad U\mathfrak{B}^s = \mathfrak{A}^s U, \qquad V\mathfrak{A}^s = \mathfrak{B}^s V.$$

En effet, par exemple,

$$U\mathfrak{B}^s = U\,\overbrace{VU\,VU\ldots VU}^{s \text{ fois.}} = \overbrace{UV\ldots UV}^{s \text{ fois.}}\,U = \mathfrak{A}^s U.$$

Il viendra

$$U\mathfrak{B}^s = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^s & 0 \\ 0 & b^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}B^s & U_{12}b^s \\ U_{21}B^s & U_{22}b^s \end{pmatrix}$$
$$= \mathfrak{A}^s U = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & a^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^sU_{11} & A^sU_{12} \\ a^sU_{21} & a^sU_{22} \end{pmatrix}.$$

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} U_{11}B^s = A^sU_{11} & U_{12}b^s = A^sU_{12}, \\ U_{21}B^s = a^sU_{21} & U_{22}b^s = a^sU_{22}. \end{array} \right.$$

De même

$$V\mathfrak{A}^s = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & a^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}A^s & V_{12}a^s \\ V_{21}A^s & V_{22}a^s \end{pmatrix}$$
$$= \mathfrak{B}^s V = \begin{pmatrix} B^s & 0 \\ 0 & b^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^sV_{11} & B^sV_{12} \\ b^sV_{21} & b^sV_{22} \end{pmatrix}.$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} V_{11}A^s = B^sV_{11} & V_{12}a^s = B^sV_{12}, \\ V_{21}A^s = b^sV_{21} & V_{22}a^s = b^sV_{22}. \end{array} \right.$$

16° Dans les relations (1) et (2) ci-dessus, faisons $s = \varpi$, $a^{\varpi} = b^{\varpi} = 0$ (13°). Il viendra notamment

$$0 = A^{\varpi} U_{12} = U_{21} B^{\varpi} = B^{\varpi} V_{12} = V_{21} A^{\varpi},$$

et, comme $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$,

$$0 = U_{12} = U_{21} = V_{12} = V_{21}.$$

De là finalement, pour $s = 1$,

$$(3) \qquad \begin{cases} U_{11} B = A U_{11} & U_{22} b = a U_{22}, \\ V_{11} A = B V_{11} & V_{22} a = b V_{22}, \end{cases}$$

et, comme $\mathfrak{A} = UV$, $\mathfrak{B} = VU$,

$$(4) \qquad \begin{cases} A = U_{11} V_{11} & B = V_{11} U_{11}, \\ a = U_{22} V_{22} & b = V_{22} U_{22}. \end{cases}$$

A et B étant invertibles, U_{11} et V_{11} le sont aussi.

17° A et B sont semblables, car

$$U_{11}^{-1} A U_{11} = U_{11}^{-1} U_{11} V_{11} U_{11} = V_{11} U_{11} = B.$$

A et B ont mêmes successifs et sont (5°), par suite, identiques, étant toutes deux typiques.

Pour que θ et η (12°) soient semblables, il faut et il suffit que

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix},$$

le soient; A et B le sont déjà; il faut donc que a et b soient semblables.

Comme (13°) $a^{\varpi} = b^{\varpi} = 0$, les considérations du 10° s'appliquent. Les conditions de similitude, nécessaires et suffisantes, sont

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathrm{R}g.a^{s} = \mathrm{R}g.b^{s}, \\ s = 1, 2, \ldots, \varpi. \end{cases}$$

Or

$$\mathrm{R}g.\mathfrak{A}^s = \mathrm{R}g.\mathrm{A}^s + \mathrm{R}g.a^s = h + \mathrm{R}g.a^s,$$
$$\mathrm{R}g.\mathfrak{B}^s = \mathrm{R}g.\mathrm{B}^s + \mathrm{R}g.b^s = h + \mathrm{R}g.b^s.$$

18° Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, but et résultat de toute la présente discussion :

Théorème. — *Soient les quatre matrices n-aires* u, v, $\theta = uv$, $\eta = vu$;

$$|\rho\mathrm{E} - \theta| = |\rho\mathrm{E} - \eta| = \rho^{n-h}\varphi(\rho), \qquad \varphi(0) \neq 0,$$

$\mathrm{E} =$ *n-aire unité.*

Pour que θ *et* η *soient semblables, il faut et il suffit que* θ^s *et* η^s *aient même rang pour* $s = 1, 2, \ldots, \varpi$, *où l'entier* ϖ *ne peut dépasser* $n - h$.

19° Si θ et η sont semblables, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont semblables et, étant typiques, sont identiques,

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \Omega, \qquad a = b = \omega.$$

Les relations (4) du 16° donnent

$$\mathrm{U}_{11}\mathrm{V}_{11} = \mathrm{V}_{11}\mathrm{U}_{11} = \Omega,$$
$$\mathrm{U}_{22}\mathrm{V}_{22} = \mathrm{V}_{22}\mathrm{U}_{22} = \omega;$$

U_{11} et V_{11} sont échangeables ainsi que U_{22} et V_{22}.