Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 138-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__138_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2090.

(1908, p. 96.)

Soient P (α, β, γ) *un point fixe quelconque situé dans le plan du triangle* ABC; θ *le centre de la conique inscrite en* α, β, γ; $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ *la polaire de* θ *dans le triangle* ABC *et* Q *la conique inscrite en* ABC *au triangle des droites* $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$. *Si un point* O (x, y, z) *décrit* Q :

1° *La polaire* ρ *de* O *tourne autour de* θ;

2° *Le centre* θ_1 *de la conique inscrite à* ABC *en* x, y, z *décrit la polaire* ρ_1 *de* P;

3° *Les parallèles à* PA, PB, PC *menées par* O *coupent* BC, CA, AB, *en* λ', μ', ν' *et l'on a la droite* $\Delta'(\lambda' \mu' \nu')$;

4° *Les parallèles à* OA, OB, OC *menées par* P *coupent* BC, CA, AB *en* λ_1, μ_1, ν_1 *et l'on a la droite* $\Delta_1(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$;

5° *Le point* $\omega(\Delta'_1 \Delta_1)$ *est le milieu de* OP *et décrit la conique* V *qui passe par les milieux des côtés de* ABC *et les points* α, β, γ;

6° *Si* P *coïncide avec l'orthocentre* H *de* ABC, θ *est le point de Lemoine*, Q *le cercle* ABC, Δ' *la droite de Simson et* V *le cercle d'Euler.* (SONDAT.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Il suffit d'établir les propositions précédentes dans le cas où le point P coïncide avec l'orthocentre H du triangle ABC, et de les généraliser au moyen d'une transformation homographique laissant invariable la droite de l'infini.

Dans ce cas, le point θ est le point de concours des médianes antiparallèles, c'est-à-dire le point de Lemoine du triangle, les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ sont les tangentes au cercle circonscrit en A, B, C, cercle qui n'est autre que la conique Q.

1° Soient u, v, w les points d'intersection de la polaire ρ d'un point O du cercle circonscrit avec BC, CA, AB; si l'on se donne le point u, les points v et w sont déterminés et uniquement; si, d'autre part, ce point u coïncide avec B par exemple, il en est de même du point w, ce qui montre que ρ passe par un point fixe. Si u coïncide avec λ, ρ devient la symédiane issue de A; le point fixe cherché est donc le point de Lemoine θ.

2° Si l'on se donne le point de contact d'une des coniques (θ_1) avec l'un des côtés du triangle ABC, cette conique est déterminée et uniquement. Les coniques (θ_1) forment, par suite, un faisceau tangentiel dont les points limites (coniques évanouissantes) sont (A, λ), (A, μ), $C, \nu)$, le lieu de leurs centres est donc la droite $\omega_1\omega_2\omega_3$, ω_1, ω_2, et ω_3 étant les milieux des segments $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$. Si M′ et M″ sont les milieux de CA et AB, on a visiblement $\omega_1 M' . \omega_1 M'' = \overline{\omega_1 A^2}$; les points ω_1, ω_2, ω_3 appartiennent, par suite, à l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points, c'est-à-dire à l'axe orthique, polaire de H.

3° Nous tombons sur le théorème de Simson.

4° Soit O′ le point diamétralement opposé à O sur le cercle ABC; les pôles des droites AO′, BO′, CO′ par rapport au cercle conjugué au triangle sont les points d'intersection des côtés de celui-ci avec les parallèles menées par H aux droites AO, BO, CO; ces points λ', μ', ν' sont sur la polaire Δ' de O′ par rapport au cercle conjugué au triangle. Soit ω le point d'intersection de Δ' avec OO′, on a

$$H\omega . HO' = HA . HH_1 = \frac{1}{2} HO . HO$$

(H_1 étant le pied de la hauteur issue ω de HA), d'où $H\omega = \frac{1}{2} HO$.

5° Le point ω étant le milieu de OH est le point de concours des droites Δ et Δ' et il décrit visiblement le cercle de neuf points.

2103.

(1908, p. 479.)

Étant données 4 *sphères* C_1, C_2, C_3, C_4 *de centres* O_1, O_2, O_3, O_4, *une sphère quelconque* Σ *coupe les axes radicaux* IA_1, IA_2, IA_3, IA_4 *de ces sphères prises* 3 *à* 3 *en* A_1, A'_1, A_2 A'_2, A_3, A'_3, A_4, A'_4. *Les quatre points* A_1, A_2, A_3 A_4, *sont les centres radicaux de* C_1, C_2, C_3, C_4 *prises* 3 *à* 3 *avec une sphère* S. *De même* A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 *sont les centres radicaux de* C_1, C_2, C_3, C_4 *prises* 3 *à* 3 *avec une sphère* S'.

1° *Montrer que* S *et* S' *peuvent se déduire l'une de l'autre de la façon suivante : leurs centres* ω *et* ω' *sont deux points inverses par rapport au tétraèdre* $O_1\,O_2\,O_3\,O_4$ *et la somme des puissances du point* I *par rapport à ces deux sphères reste constante quand* Σ *varie.*

2° *Montrer qu'il y a une surface lieu des points* ω *et* ω' *tels que* S *et* S' *soient orthogonales quel que soit le rayon arbitraire attribué à l'une d'elles et étudier cette surface.*

(GILBERT.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

1° Prenons le point I comme origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires : soient

$$C_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y - 2\gamma_i z + \delta = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des sphères C,

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

la sphère Σ et enfin

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + t_1 = 0,$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2 + t_2 = 0$$

les sphères S et S'.

Soit

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

nous désignerons par U_i, V_i, W_i, Δ_i, les coefficients de α_i, β_i, γ_i, 1 (pris dans la ligne i) dans le développement de D.

L'axe radical des sphères C_2, C_3, C_4 a pour équations $\frac{x}{U_1} = \frac{y}{V_1} = \frac{z}{W_1}$ et l'équation aux ρ des points d'intersection de cette droite avec Σ sera

$$\rho^2(U_1^2 + V_1^2 + W_1^2) - 2\rho(aU_1 + bV_1 + cW_1) + d = 0.$$

Soient ρ_4, ρ'_4 les racines de cette équation correspondant aux points A_4 et A'_4. Le point A_4 sera le centre radical des sphères C_2, C_3, C_4 et S si l'on a

$$\begin{aligned} & -2\rho_4(\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1) + \delta \\ = & -2\rho_4(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1) + t_1 \end{aligned}$$

ou puisque $\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1 + \Delta_1 = 0$,

$$(1) \qquad 2\rho_4(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1) = t_1 - \delta;$$

nous aurons, de même, si A'_4 est le centre radical de C_2, C_3, C_4, S',

$$(2) \qquad 2\rho'_4(x_2 U_1 + y_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1) = t_2 - \delta;$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} & 4\rho_4\rho'_4(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1) \\ & \quad \times (x_2 U_1 + y_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1) = (t_1 - \delta)(t_2 - \delta) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 U_1 + y_1 V_1 + z_1 W_1 + \Delta_1)(x_2 U_1 + y_2 V_1 + z_2 W_1 + \Delta_1)}{U_1^2 + V_1^2 + W_1^2} \\ & = \frac{(t_1 - \delta)(t_2 - \delta)}{4d}; \end{aligned}$$

le premier membre représente le produit des distances des points ω et ω' au plan $O_2\,O_3\,O_4$, on voit de même que le produit des distances de ces deux points aux plans $O_1\,O_3\,O_4$, $O_1\,O_2\,O_4$, $O_1\,O_2\,O_3$ est égal à $\frac{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}{4d}$, ce qui prouve que ces points sont inverses par rapport au tétraèdre $O_1\,O_2\,O_3\,O_4$.

Des relations (1) et (2) on déduit la suivante :

$$U_1\left(\frac{x_1}{t_1-\delta}+\frac{x_2}{t_2-\delta}\right)+V_1\left(\frac{y_1}{t_1-\delta}+\frac{y_2}{t_2-\delta}\right)$$
$$+W_1\left(\frac{z_1}{t_1-\delta}+\frac{z_2}{t_2-\delta}\right)+\Delta_1\left[\frac{t_1+t_2-2\delta}{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho'_4}\right)=\frac{aU_1+bV_1+cW_1}{d}$$

ou

$$U_1\left(\frac{x_1}{t_1-\delta}+\frac{x_2}{t_2-\delta}-\frac{a}{d}\right)+V_1\left(\frac{y_1}{t_1-\delta}+\frac{y_2}{t_2-\delta}-\frac{b}{d}\right)$$
$$+W_1\left(\frac{z_1}{t_1-\delta}+\frac{z_2}{t_2-\delta}-\frac{c}{d}\right)+\Delta_1\frac{t_1+t_2-2\delta}{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}=0.$$

Si entre cette relation et les trois relations analogues nous éliminons

$$\frac{x_1}{t_1-\delta}+\frac{x_2}{t_2-\delta}-\frac{a}{d},$$
$$\frac{y_1}{t_1-\delta}+\frac{y_2}{t_2-\delta}-\frac{b}{d},$$
$$\frac{z_1}{t_1-\delta}+\frac{z_2}{t_2-\delta}-\frac{c}{d},$$

il vient, en désignant par Δ le déterminant adjoint du déterminant D,

$$\Delta\frac{t_1+t_2-2\delta}{(t_1-\delta)(t_2-\delta)}=0,$$

D étant par hypothèse non nul, puisque les points O_1, O_2, O_3, O_4 ne sont pas dans un même plan, Δ n'est pas nul et l'on a

$$t_1+t_2-2\delta=0,$$

ce qui montre que la somme des puissances du point I par rapport à S et S′ est constante.

2° Si les sphères S et S′ sont orthogonales, on aura

$$(1)\qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \delta;$$

si nous désignons par

$$P_i = x\cos\alpha_i + y\cos\beta_i + z\cos\gamma_i - p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les faces du tétraèdre $O_1\,O_2\,O_3\,O_4$, nous aurons, les points ω et ω' étant inverses par rapport à ce tétraèdre,

$$(2)\qquad \begin{aligned} & x_2\cos\alpha_i + y_2\cos\beta_i + z_2\cos\gamma_i - p_i \\ & \quad = \frac{\lambda}{x_1\cos\alpha_i + y_1\cos\beta_i + z_1\cos\gamma_i - p_i}; \end{aligned}$$

éliminons x_2, y_2, z_2, λ entre les relations (1) et (2), ces relations étant symétriques en $x_1\,y_1\,z_1$, $x_2\,y_2\,z_2$ le résultat de l'élimination sera la surface lieu *des points* ω *et* ω' telle que les sphères S et S′ soient orthogonales. Le résultat de l'élimination est

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & \frac{1}{P_1} & p_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \frac{1}{P_2} & p_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & \frac{1}{P_3} & p_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & \frac{1}{P_4} & p_4 \\ x & y & z & 0 & \delta \end{vmatrix} = 0;$$

ce qui peut s'écrire

$$\Sigma P_2 P_3 P_4 \begin{vmatrix} \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & p_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & p_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & p_4 \\ x & y & z & \delta \end{vmatrix} = 0;$$

le lieu cherché est une surface du quatrième ordre passant par les arêtes du tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$.

Remarques. — On a

$$\overline{I\omega}^2 + \overline{I\omega'}^2 - R_\omega^2 - R_{\omega'}^2 = 2\delta,$$

et si les sphères S et S′ sont orthogonales

$$\overline{\omega\omega'}^2 = R_\omega^2 + R_{\omega'}^2,$$

ce qui donne

$$\overline{I\omega}^2 + \overline{I\omega'}^2 - \overline{\omega\omega'}^2 = 2\delta$$

ou encore

$$I\omega\, I\omega' \cos \widehat{\omega I \omega'} = \delta,$$

les points ω et ω' étant inverses par rapport au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, cette dernière relation donne une définition géométrique de la surface lieu de ω et ω' (surface qui est visiblement anallagmatique dans l'inversion tétraédrique).

On peut étudier la surface au moyen de cette relation, qui peut s'écrire, en appelant ω'_1 la projection de ω' sur $I\omega$,

$$I\omega\, I\omega'_1 = \delta.$$

On voit donc que, si ω est un point de la surface, son inverse par rapport au point I, la puissance d'inversion étant δ, étant ω'_1, le plan perpendiculaire à $I\omega$ en ω'_1 passe par le point ω' inverse de ω par rapport au tétraèdre.

Cette remarque permet, par exemple, de déterminer immédiatement les droites autres que les arêtes du tétraèdre suivant lesquelles la surface considérée coupe les faces de celui-ci. Sur la face $O_2O_3O_4$ par exemple c'est l'intersection de cette face avec le plan perpendiculaire à O_1I au point O'_1 tel que $O_1I.O'_1I = \delta$.