Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 185-192

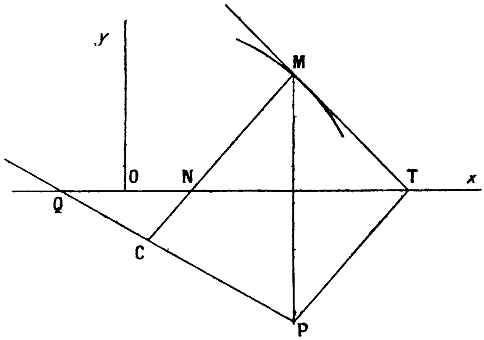
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__185_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. — *Existence de l'intégrale définie.*

II. Problème. — *Étant donné un point* M *d'une courbe* (C), *on mène la tangente* MT, *la normale* MN, *et l'on détermine le point* P *par l'intersection de la perpendiculaire menée par* M *à l'axe* Ox *et de la parallèle menée par* T



à MN; *on joint le point* P *au centre de courbure* C *relatif au point* M; *la droite* CP *rencontre* Ox *en* Q.

1° *Déterminer la courbe* (C) *connaissant l'abscisse* X *de* Q;

2° *Cette détermination se ramène aux quadratures si* X *est fonction de* x; *on prendra cette fonction sous la forme*

$$X = x f(x);$$

3° *Traiter les cas particuliers suivants :*

$$f(x) = k; \qquad f(x) = \frac{k}{x}; \qquad f(x) = x,$$

où k *est une constante.*

Épreuve pratique. — *Calculer*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}\,dx}{3x^2+2x+1}.$$

(Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — I. Question de cours. — *Surfaces développables. Définition. Indiquer quelles sont leurs lignes asymptotiques et leurs lignes de courbure. Toute surface développable satisfait à l'équation* $rt - s^2 = 0$ *et inversement les intégrales de l'équation* $rt - s^2 = 0$ *sont les surfaces développables.*

II. Problème. — *La droite*

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = \varphi - \cos\varphi$$

enveloppe une courbe C *dont on donnera la définition géométrique.*

Soit ω *le centre de courbure relatif à un point* M *de la courbe* C; *sur la normale* ωM, *on prend le point* P *tel que*

$$\omega P = k\,\overline{\omega M}.$$

Le point P *décrit une courbe; construire la tangente en un point de cette courbe, en supposant d'abord que* k *est une quantité fixe, puis une quantité variable.*

Déterminer les courbes Γ *qui coupent les normales* ωM *sous un angle constant* θ.

Soit en particulier Γ_1 *celle de ces courbes qui passe par le même point que la courbe* C *pour* $\varphi = 0$; *déterminer sa développée.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''' - y'' - y' + y = (24x - 4)e^x + 3x.$$

Déterminer l'intégrale qui satisfait aux conditions initiales suivantes :

$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad y' = -1, \qquad y'' = 0.$$

Calculer à 0,001 *près l'ordonnée du point d'abscisse* $x = 0,8$ *ainsi que le coefficient angulaire de la tangente en ce point.* (Juillet 1911.)

Lyon.

Épreuve théorique. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$2p \operatorname{ch} x + 2qy \operatorname{sh} x - z \operatorname{sh} x = 0.$$

Déterminer la surface intégrale qui contient la droite

$$x = y = z$$

et celle qui contient la parabole

$$x = 0, \qquad z^2 = 2m(y - a).$$

Qu'arrive-t-il si l'on cherche à déterminer une surface intégrale passant par la chaînette $z = 0$, $y = \alpha \operatorname{ch} x$?

II. *Chercher les lignes asymptotiques de la surface qui a pour équation*

$$x \operatorname{cotang}\left(\frac{y}{x}\right) = 1 - z \operatorname{cotang} z.$$

Nota. — *On pourra poser* $z = v$, $y = ux$, *et exprimer ainsi* x, y, z *en fonction de* u *et* v.

Épreuve pratique. — *Soit*

$$y^2 = X = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Je considère les intégrales

$$y_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad z_m = \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{X}};$$

exprimer y_2 *et* y_3 *en fonction de* y_0, y_1 : *puis* z_2 *en fonction de* z_1, y_0, y_1; *on distinguera les deux cas où* a *est ou n'est pas zéro de* X.

Posant enfin $x = \wp u$, $y = \wp' u$, *dire quelles formules on en déduit relativement aux fonctions elliptiques.*

(Juillet 1910.)

Epreuve théorique. — I. 1° *Exprimer* $\wp(2u)$ *en fonction rationnelle de* $\wp u$;

2° *Étant donné* $\wp u = a$, *calculer* $\wp\left(\frac{u}{2}\right) = t$. *Peut-on interpréter géométriquement la signification des racines de l'équation en* t *obtenue, en utilisant la cubique définie par les équations*

$$x = \wp u, \qquad p = \wp' u;$$

3° 2ω *et* $2\omega'$ *étant les périodes de la fonction elliptique* $\wp u$, *on suppose* ω *et* $\frac{\omega'}{i}$ *réels et positifs; a étant réel,* *à quelle condition les quatre racines de l'équation en t sont-elles réelles ? Si $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ désignent ces quatre racines, rangées par ordre de grandeur, et si l'on pose $p(v_\alpha) = t_\alpha$, déterminer v_1, v_2, v_3, v_4, v étant un nombre tel que $pv = a$;*

4° e_1 désignant le plus grand zéro du polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$, où g_2, g_3 sont les deux invariants relatifs à pu, on suppose en particulier $a = e_1$. Étudier ce cas spécial. Calculer $p\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right)$.

II. *Soit $y = p(mu)$, $x = pu$: trouver la relation qui existe entre $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. Montrer que si m est un nombre entier réel, l'équation différentielle obtenue admet une intégrale de la forme $y = R(x)$, R désignant une fonction rationnelle de x.*

Formules pouvant être utiles :

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2,$$

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

La formule à obtenir dans la première question est

$$p(2u) = \frac{\left(p^2 u + \frac{1}{4} g^2\right)^2 + 2g_3 pu}{4p^3 u - g_2 pu - g_3}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la cubique gauche Γ qui, rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, est définie par les équations*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Soit M l'un de ses points. Le plan osculateur P au point M à la cubique Γ coupe l'axe Oz au point A. On considère la surface réglée S engendrée par la droite MA lorsque le point M décrit la cubique Γ. On demande de trouver les lignes asymptotiques de la surface S.

Dans le plan xOy on considère les deux points $B(x = y = 1)$ et $C(x = 1, y = 2)$. Par le point B passent deux lignes, projections des lignes asymptotiques de S sur le plan xOy, parallèlement à Oz ; par le point C passent deux lignes, projections des lignes asymptotiques de S sur le plan xOy, parallèlement à Oz. Ces quatre lignes forment un qua-

drilatère mixtiligne BECD, *dont* B *et* C *sont deux sommets opposés. On considère le cylindre qui a pour base ce quadrilatère, dont les génératrices sont parallèles à* Oz, *et qui est limité à la surface* S. *Trouver le volume de ce cylindre.* (Novembre 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soient* OX, OY, OZ, *trois axes de coordonnées rectangulaires. Une surface* S *jouit de la propriété suivante : si* $M(x, y, z)$, *est un point de cette surface,* N, *le point où la normale en* M *à la surface* S *coupe le plan* XOY, P, *le pied de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur le plan* XOY, *on a* $\overline{PN} = a$, *a désignant une longueur constante. Trouver l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont la surface* S *est une surface intégrale.*

II. *Trouver une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles.*

III. *Déterminer la bande caractéristique d'éléments linéaires,* (x, y, z, p, q), *définie par un élément* $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ *dont les coordonnées satisfont à l'équation aux dérivées partielles. Quelle est la nature des courbes caractéristiques?*

IV. *Chercher l'équation du cône* T, *enveloppe des plans tangents aux surfaces intégrales qui passent par un point donné,* (x, y, z). *En déduire l'équation aux différentielles totales des courbes intégrales.*

V. *Chercher la surface intégrale engendrée par les courbes caractéristiques issues du point* $x = y = 0$, $z = h$.

VI. *Déterminer les deux surfaces intégrales qui passent par la droite* $x = y = z$.

VII. *Chercher les courbes intégrales situées dans le plan* $z = x$, *et en particulier la courbe intégrale* C *de ce plan qui passe au point* $z = x = a$, $y = 0$.

VIII. *Déterminer la surface intégrale qui contient la courbe* C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Calculer l'intégrale de surface*

$$I = \int_S\int (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy),$$

la surface S *étant définie par les équations*

$$x = (a + b \cos\varphi) \cos\psi,$$
$$y = (a + b \cos\varphi) \sin\psi,$$
$$z = b \sin\varphi,$$

a et b sont des constantes, φ *et* ψ *varient de* 0 *à* 2π.

II. *Chercher sur la surface qui a pour équation en axes de coordonnées rectangulaires,* $z = \cos x \cos y$, *le lieu des points où l'indicatrice est un système de droites parallèles, le lieu des points où l'indicatrice est formée d'hyperboles équilatères conjuguées, et, enfin, trouver les lignes asymptotiques.* (Juillet 1911.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On peut intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2 - y^4)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

en prenant pour nouvelles variables les quantités y *et* $\frac{x}{y}$. *Les courbes intégrales* (C) *sont unicursales et n'ont aucun point à l'infini;*

2° *Comment définit-on les diverses significations de l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+z+1)}$$

lorsque le point z *décrit dans son plan un chemin quelconque allant d'un point* z_0 *à un point* z?

3° *Si le chemin choisi est fermé et est formé par l'une des courbes unicursales* (C) *ne passant par aucun point singulier, distinguer les différents groupes de courbe* (C) *qui diffèrent par les valeurs d'intégrales qu'elles fournissent.*

SOLUTION.

1° Si $\frac{x}{y} = t$, on a

$$y\,dy + t\,dt = 0,$$

d'où les courbes (C)

$$\text{(D)} \qquad \frac{x^2}{y^2} + y^2 = a^2,$$

ou

$$x = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \qquad \text{et} \qquad y = a \sin \varphi.$$

Quand a varie, les courbes (C) se succèdent boucles dans boucles, comme le prouvent l'étude du coefficient angulaire des tangentes à l'origine et la forme en huit des courbes;

3° Les points singuliers et leurs résidus sont :

$$m = +i, \qquad m' = -i, \qquad b = \alpha, \qquad b' = \alpha^2,$$

$$\varepsilon_m = -\frac{1}{2}, \qquad \varepsilon_{m'} = -\frac{1}{2}, \qquad \varepsilon_b = \frac{3 - i\sqrt{3}}{6}, \qquad \varepsilon_{\alpha'} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}.$$

Les valeurs de séparation sont $a^2 = 1, \frac{13}{12}$. Les deux premiers groupes de courbes (C) donnent zéro. Le dernier groupe donne, pour un seul tour, $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Condition pour qu'une série de sections circulaires d'un ellipsoïde soit une série de lignes de courbure;*

2° *Les pôles d'une fonction méromorphe sont simples et disposés d'après la loi*

$$a_n = \sqrt[3]{n}\, e^{in\frac{\pi}{4}}.$$

Les résidus sont donnés par la formule

$$\varepsilon_n = \frac{n+i}{n-i}.$$

Former, d'après la règle d'Hermite, l'expression d'une fonction qui ne diffère de la fonction méromorphe que par une fonction entière.

SOLUTION.

1° Toute sphère passant par une section circulaire coupe la surface suivant une seconde section circulaire.

Tout système de cercles lignes de courbure correspond à un système de sphères inscrites.

La compatibilité des deux conditions impose que les deux systèmes de sections circulaires soient confondus. Donc l'ellipsoïde est de révolution.

2° La fonction d'Hermite est

$$\sum_1^\infty \frac{n+i}{n-i}\left[\frac{1}{z-n^{\frac{1}{3}}e^{in\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}e^{in\frac{\pi}{2}}}+\frac{z}{n^{\frac{2}{3}i2n\frac{\pi}{4}}}+\frac{z^2}{n^{\frac{3}{8}i3n\frac{\pi}{4}}}+\frac{z^3}{n^{\frac{4}{3}}e^{i3n\frac{\pi}{4}}}\right].$$

(Juin 1910.)

Épreuve théorique. — 1° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface représentée par les équations*

$$x = (1+u)\operatorname{ch} v,$$
$$y = (1-u)\operatorname{sh} v,$$
$$z = u,$$

où $\operatorname{sh} v$ *et* $\operatorname{ch} v$ *représentent le sinus et le cosinus hyperboliques de l'argument* v *et où* u *et* v *sont les variables indépendantes;*

2° *Même question en supposant que l'on remplace* $\operatorname{sh} v$ *et* $\operatorname{ch} v$ *par le sinus et le cosinus ordinaires,* $\sin v$ *et* $\cos v$;

3° *Rapprocher les deux questions.*

Épreuve pratique. — *Conditions pour que l'intégrale définie*

$$J = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$$

ait un sens.

Démontrer que l'on peut mettre cette intégrale sous la forme

$$J = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}dx.$$

Démontrer que, si l'on pose $p = \frac{2m+1}{2n}$ *en prenant pour* m *et* n *des nombres entiers tels que* p *satisfasse aux conditions trouvées plus haut, on a aussi*

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\,x^{2m}\,dx}{1+x^{2m}}.$$

Enfin, à l'aide de cette dernière forme, montrer que l'on a

$$J = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

(Juin 1911.)