NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VALIRON

Maximum du module des fonctions entières de genre un et deux

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 193-212

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__193_0>

[D4d]

MAXIMUM DU MODULE DES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE UN ET DEUX;

Par M. G. VALIRON.

Je me propose de donner ici une limite supérieure précise du maximum du module d'une fonction entière d'*ordre non entier* et de genre *un* ou *deux*. Pour les fonctions de genre *un*, le résultat que j'indique est une généralisation de la formule donnée par M. Lindelöf dans son *Mémoire sur les fonctions entières* (p. 63), mais la méthode est différente. Je ferai usage des résultats obtenus par M. Denjoy dans le premier Chapitre de sa Thèse.

1. *Notations et résultats acquis.* — On peut évidemment se borner à considérer un produit canonique. Nous désignerons suivant l'usage par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ les zéros; par r_n le module de a_n; par p le genre et ρ l'exposant de convergence; enfin, nous posons

$$E(x, p) = (1 - x)\, e^{x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^p}{p}},$$

de sorte que le produit s'écrit

$$F(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p\right).$$

Soit $\rho[1 + \beta(x)]$ un *exposant net* de la suite des zéros ([1]); on a, pour $n > n_0$,

$$n \leqq r_n^{\rho[1+\beta(r_n)]},$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n; par suite, si $y^{\frac{1+\alpha(y)}{\rho}}$ désigne la fonction inverse de $x^{\rho[1+\beta(x)]}$, on a pour $n > n_0$

$$r_n \geqq n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux deux conditions suivantes:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{x=\infty} \alpha(x) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \alpha'(x) x \log x = 0.$$

Nous poserons

$$\text{(1)} \qquad R_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}};$$

on aura donc

$$r_n \geqq R_n \qquad (n > n_0).$$

Soit alors $M(u)$ le maximum de $|E(x, p)|$ pour $|x| = u$; $M(u)$ est une fonction croissante de u, on a donc

$$M\left(\frac{r}{r_n}\right) < M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

et, par suite, en désignant par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ pour $|z| = r$,

$$\text{(2)} \qquad M(r) < \prod_{n=1}^{n=\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right).$$

Le calcul de $M(u)$ a été fait par M. Denjoy (Thèse, p. 17).

([1]) Pour cette définition, *voir* mon article *Expression asymptotique de certaines fonctions entières* (*Nouvelles Annales*).

Pour $u \leqq 1 + \frac{1}{p}$,

$$(3) \quad \begin{cases} \log[\mathrm{M}(u)] = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} du, \\ u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1}; \end{cases}$$

Pour $u \geqq 1 + \frac{1}{p}$,

$$(4) \qquad \mathrm{M}(u) = (u-1)e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}};$$

le maximum correspond, pour $u \leqq 1 + \frac{1}{p}$ à $x = u$, et pour $u \geqq 1 + \frac{1}{p}$ à $x = ue^{i\theta}$.

2. *Calcul de certaines sommes.* — Soit a un nombre réel supérieur à *un*, définissons n' par les inégalités

$$(5) \qquad \mathrm{R}_{n'} \leqq \frac{r}{a} < \mathrm{R}_{n'+1};$$

nous désignerons par n_0 un nombre tel que, pour $x > n_0$, $\alpha(x)$ et $\alpha'(x) x \log x$ soient très petits (inférieurs en valeur absolue à un nombre positif η) et nous supposerons r assez grand pour que $\left(\frac{n_0}{n'}\right)^{1-\frac{p}{\rho}}$ soit arbitrairement petit ($< \eta$).

Ceci posé, considérons la somme

$$\sum_{n_0}^{n'} \frac{\mathrm{R}_n^q}{r^q} \qquad (q \geqq -p);$$

en posant

$$\frac{r}{a} = (n' + \theta)^{\frac{1+\alpha(n'+\theta)}{\rho}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

on a

$$\sum_{n_0}^{n'} \mathrm{R}_n^q = \theta_1 \mathrm{R}_{n'}^q + \int_{n_0}^{n'+\theta} x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} dx \qquad (0 < \theta_1 < 1).$$

Mais nous avons

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\rho}{\rho+q}x\,x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\right]$$
$$= x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\left[1+\frac{q\,\alpha(x)}{\rho+q}-\frac{q}{\rho+q}x\log x\,\alpha'(x)\right]$$
$$= (1+\varepsilon'_q)\,x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}} \quad (^1),$$

d'où

$$\sum_{n_0}^{n'} \mathrm{R}_n^q = \theta_1 \mathrm{R}_{n'}^q + \frac{\rho}{\rho+q}\left[x\,x^{[1+\alpha(x)]\frac{q}{\rho}}\right]_{n_0}^{n'+\theta} (1+\varepsilon''_q),$$

et, d'après la condition imposée à n',

$$\sum_{n_0}^{n'} \mathrm{R}_n^q = \theta_1 \mathrm{R}_{n'}^q + \frac{\rho}{\rho+q}\,n'\left(\frac{r}{a}\right)^q (1+\varepsilon'''_q);$$

enfin, en utilisant l'inégalité (5),

$$(6)\qquad \sum_{n_0}^{n'} \frac{\mathrm{R}_n^q}{r^q} = n'\frac{\rho}{\rho+q}\,\frac{1}{a^q}(1+\varepsilon_q) \qquad (q \geqq -p) \quad (^2).$$

De la même façon, on pourra effectuer le calcul de la somme

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^q}{\mathrm{R}_n^q} \qquad (q \geqq p+1);$$

on trouvera

$$(7)\qquad \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^q}{\mathrm{R}_n^q} = n'\frac{\rho}{q-\rho}\,a^q(1+\varepsilon_{-q}).$$

---

(1) Dans tout ce qui suit, ε affecté ou non d'indices représente une quantité tendant vers zéro avec η, et d'une façon uniforme, par exemple $\varepsilon_\beta^\alpha > \sqrt{\eta}$; η tend d'ailleurs vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

(2) Pour $q>0$ on a, en effet, $\mathrm{R}_{n'}^q < \left(\frac{r}{a}\right)^q$; pour $q<0$, $\mathrm{R}_{n'} = \frac{r}{a}(1+\varepsilon_{n'})$, $\varepsilon_{n'}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n'}$, car $\frac{\mathrm{R}_{n'+1}}{\mathrm{R}_{n'}}$ tend vers un.

Enfin, si nous considérons la somme

$$\sum_{n_0}^{n'} \log R_n,$$

nous pourrons l'écrire

$$\sum_{n_0}^{n'} \log R_n = \theta_1 \log R_{n'} + \int_{n_0}^{n'+\theta} \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x \, dx,$$

et comme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\alpha(x)}{\rho} x(\log x - 1)\right] = \frac{1+\alpha(x)}{\rho} \log x + \varepsilon(x)$$
$$(n_0 < x < n'),$$

nous aurons

$$(8) \qquad \sum_{n_0}^{n'} \log R_n = \theta_1 \log R_{n'} + n' \log \frac{r}{a} - n'(1+\varepsilon')\frac{1}{\rho}$$
$$= n' \log r - n'(1+\varepsilon)\left[\frac{1}{\rho} + \log a\right].$$

3. *Fonctions entières de genre un.* — Pour $p = 1$, l'inégalité (3) devient

$$\log[M(u)] = \int_0^u u \, du \qquad \left(u \leqq 1 + \frac{1}{p}\right);$$

donc pour $u \leqq 2$, on a

$$(3') \qquad \log M(u) = \frac{u^2}{2},$$

et pour $u \geqq 2$,

$$(4') \qquad M(u) = (u-1)e^u.$$

L'inégalité (2) devient alors

$$(2') \quad M(r) \leqq \prod_{n=1}^{n=\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \left[\prod_1^{n'}\left(\frac{r}{R_n} - 1\right) e^{\frac{r}{R_n}}\right] e^{\sum\limits_{n'+1}^{\infty} \frac{r^2}{2R_n^2}},$$

où le nombre n' est défini par la double inégalité

$$R_{n'} \leqq \frac{r}{2} < R_{n'+1}.$$

Nous allons donc appliquer les calculs du paragraphe précédent, en prenant $a = 2$.

Nous avons

$$\prod_{n_0}^{n'} \left(\frac{r}{R_n} - 1\right) e^{\frac{r}{R_n}} = \frac{r^{n'-n_0}}{R_{n_0} R_{n_0+1} \ldots R_{n'}} \prod_{n_0}^{n'} \left(1 - \frac{R_n}{r}\right) e^{\frac{r}{R_n}}$$

$$= \frac{r^{n'-n_0}}{R_{n_0} R_{n_0+1} \ldots R_{n'}} e^{\sum\limits_{n_0}^{n} \left[\frac{r}{R_n} + \log\left(1 - \frac{R_n}{r}\right)\right]} = A e^{B}.$$

Nous obtenons alors

$$\log A = (n' - n_0) \log r - \sum_{n_0}^{n'} \log R_n,$$

et, en utilisant l'égalité (8) où $a = 2$,

$$\log A = n'(1 + \varepsilon)\left[\frac{1}{\rho} + \log 2\right] - n_0 \log r.$$

De même, d'après l'égalité (6),

$$B = \sum_{n_0}^{n'} \frac{r}{R_n} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q} \sum_{n=n_0}^{n=n'} \frac{R_n^q}{r^q}$$

$$= n'(1 + \varepsilon)\left[\frac{2\rho}{\rho - 1} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(\rho + q)} \frac{1}{2^q}\right],$$

et enfin, d'après l'égalité (7),

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{r^2}{2 R_n^2} = n'(1 + \varepsilon) \frac{2\rho}{2 - \rho};$$

l'addition de ces divers résultats nous donne

$$\log M(r) \leqq K + n'(1+\varepsilon)\left[\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(q+\rho)}\,\frac{1}{2^q}\right] - n_0 \log r,$$

où K dépend de n_0 et r, $K < n_0 h r$; par suite, en prenant r assez grand, comme $\frac{n'}{n_0 r}$ et $\frac{n'}{\log r}$ croissent indéfiniment, on a

$$(9) \quad \log M(r) \leqq n'(1+\varepsilon)\left[\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(q+\rho)}\,\frac{1}{2^q}\right].$$

L'égalité a lieu lorsque les arguments des zéros sont convenablement choisis. Le crochet qui figure au second membre peut s'écrire sous une forme plus simple : on a

$$\frac{\rho}{q(q+\rho)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q+\rho},$$

d'où

$$\sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\rho}{q(\rho+q)2^q} = \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q\,2^q} - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q} = \log 2 - \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q},$$

le crochet considéré devient ainsi

$$\frac{2\rho}{2-\rho} + \frac{2\rho}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q} = \frac{2\rho}{2-\rho} + 2 + \frac{1}{\rho-1} + \frac{1}{\rho} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{(q+\rho)2^q},$$

ce qui peut encore s'écrire, en groupant les deux premiers termes et en faisant entrer le troisième et le quatrième dans le Σ,

$$\frac{4}{2-\rho}+\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{1}{(\rho+q-1)2^{q-1}}=\frac{4}{2-\rho}+2\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{1}{(\rho+q-1)2^{q}};$$

en posant

$$H_2=\frac{4}{2-\rho}+2\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{1}{(\rho+q-1)2^{q}},$$

nous avons

$$\log M(r)\leqq n'(1+\varepsilon)H_2; \tag{10}$$

n' est défini par les inégalités

$$R_{n'}\leqq\frac{r}{2}<R_{n'+1}$$

ou

$$(n'+\theta)^{\frac{1+\alpha(n'+\theta)}{\rho}}=\frac{r}{2}.$$

On tire de là

$$n'+\theta=\left(\frac{r}{2}\right)^{\rho\left[1+\beta\left(\frac{r}{2}\right)\right]},$$

$\beta(x)$ étant la fonction considérée au paragraphe **1**; or, d'après les propriétés (A) qui sont vérifiées par $\beta(x)$, on a

$$\beta\left(\frac{r}{2}\right)=\beta(r)-\frac{r}{2}\beta'(\theta' r)\qquad\left(\frac{1}{2}<\theta'<1\right)$$

ou

$$\beta\left(\frac{r}{2}\right)=\beta(r)-\frac{\varepsilon}{\log r},$$

et par suite

$$n'=(1+\varepsilon)\frac{r^{\rho[1+\beta(r)]}}{2^{\rho}}.$$

L'inégalité (10) prend ainsi la forme

$$(11) \qquad \log M(r) \leqq (1+\varepsilon)\frac{H_2}{2\rho} r^{\rho[1+\beta(r)]},$$

où $\rho[1+\beta(x)]$ est *un exposant net de la fonction.*

Le nombre H_2 est défini par une série convergeant à la façon d'une progression géométrique, si l'on désigne par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

la série hypergéométrique

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2\ldots p} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)} x^p + \ldots,$$

on peut écrire

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-1)2^q} = \frac{1}{\rho-1}\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\rho-1}{\rho+q-1}\frac{1}{2^q}$$
$$= \frac{1}{\rho-1} F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right),$$

de sorte que nous avons

$$H_2 = \frac{4}{2-\rho} + \frac{2}{\rho-1} F\left(1, \rho-1, \rho, \frac{1}{2}\right).$$

On peut aussi retrouver la forme donnée au nombre H_2 par M. Lindelöf. Considérons d'une façon générale le nombre

$$E = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(\rho+q-p)c^q} = \frac{1}{\rho-p} F\left(1, \rho-p, \rho, \frac{1}{c}\right)$$
$$(\rho > p, \ c \geqq 2).$$

Si nous considérons la série

$$g(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{x^{\rho-p+q}}{(\rho-p+q)c^q},$$

on a

$$E = g(1) \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0\,;$$

d'autre part,

$$g'(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{x^{\rho-p-1+q}}{c^q} = x^{\rho-p-1} \frac{1}{1-\frac{x}{c}},$$

donc

$$E = \int_0^1 \frac{x^{\rho-p-1}}{1-\frac{x}{c}}\, dx.$$

En posant $x = 1 - \frac{1}{z}$, nous aurons

$$\begin{aligned} E &= -\int_1^{+\infty} \frac{c}{c-1} (z-1)^{\rho-p-1} z^{-\rho+p-1} \left(1 + \frac{\frac{1}{c-1}}{z}\right)^{-1} dz \\ &= -\frac{c}{c-1} \int_1^{\infty} z^{-\rho+p-1} (z-1)^{\rho-p-1}\, dz \\ &\quad \times F\left(1,\ 1,\ \rho - p + 1,\ \frac{1}{1-c}\right), \end{aligned}$$

et comme

$$-\int_1^{\infty} z^{-\rho+p-1} (z-1)^{\rho-p-1}\, dz = \int_0^1 (1-u)^{\rho-p-1}\, du = \frac{1}{\rho - p},$$

on aura

$$E = \frac{c}{c-1} \frac{1}{\rho-p} F\left(1,\ 1,\ \rho - p + 1,\ \frac{1}{1-c}\right),$$

ou encore l'égalité

$$F\left(1,\ \rho - p,\ \rho,\ \frac{1}{c}\right) = \frac{c}{c-1} F\left(1,\ 1,\ \rho - p + 1,\ \frac{1}{1-c}\right).$$

En particulier, pour $p - 1$, $c = 2$, nous obtenons

$$F\left(1,\ \rho - 1,\ \rho,\ \frac{1}{2}\right) = 2\, F(1,\ 1,\ \rho,\ -1),$$

en portant dans l'expression de H_2, on a

$$H_2 = \frac{4}{2-\rho} + \frac{4}{\rho - 1} F(1,\ 1,\ \rho,\ -1):$$

c'est l'expression trouvée par M. Lindelöf. La série $F(1, 1, \rho, -1)$ converge d'ailleurs très lentement.

4. *Fonctions de genre deux.* — Dans ce cas, $p=2$, les expressions du maximum $M(u)$ deviennent : pour $u \leqq \frac{3}{2}$,

$$(3'') \quad \log M(u) = 2\int_0^u u^2 \cos\theta \, du \qquad \left(u = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right);$$

pour $u \geqq \frac{3}{2}$,

$$(4'') \qquad M(u) = (u-1)\, e^{u + \frac{u^2}{2}}.$$

De l'égalité $u = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ nous tirons

$$u = \frac{4\cos^2\theta - 1}{2\cos\theta},$$

d'où, comme $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$,

$$\cos\theta = \frac{u + \sqrt{u^2+4}}{4};$$

et par conséquent nous avons, pour $u \leqq \frac{3}{2}$,

$$(12) \quad \log M(u) = 2\int_0^u \frac{u^3 + 2u^2\left(1 + \frac{u^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{4}\, du$$
$$= \frac{u^4}{8} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{40} + \ldots$$
$$+ (-1)^{q+1} \frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q} \frac{u^{2q+3}}{(2q+3)2^{3q}} + \ldots$$

Nous aurons ici

$$M(r) \leqq \prod_1^\infty M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \prod_1^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n'+1}^\infty M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

en posant

$$R_{n'} \leqq \frac{2r}{3} < R_{n'+1}.$$

Le calcul de $\prod_{1}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$ est analogue à celui fait précédemment, il suffira d'utiliser les résultats du paragraphe 2, en prenant $a = \frac{3}{2}$. Nous aurons

$$\prod_{n_0}^{n} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \frac{r^{n'-n_0}}{R_1 R_2 \ldots R_{n'}} e^{\sum_{n_0}^{n'}\left[\frac{r}{R_n} + \frac{r^2}{2R_n^2} + \log\left(1 - \frac{R_n}{r}\right)\right]},$$

et nous obtiendrons

$$\prod_{n_0}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = e^{n'(1+\varepsilon)L - n_0 \log r}, \tag{13}$$

où L est défini comme il suit :

$$L = \frac{1}{\rho} + \log\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{\rho}{\rho - 1} + \frac{9}{8}\,\frac{\rho}{\rho - 2} - \sum_{1}^{\infty} \frac{\rho}{q(\rho + q)\left(\frac{3}{2}\right)^q};$$

ici encore, nous pouvons transformer cette expression

$$\frac{\rho}{q(\rho + q)} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q + \rho},$$

d'où

$$L = \frac{1}{\rho} + \log\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{\rho - 1} + \frac{9}{8} + \frac{9}{4}\,\frac{1}{\rho - 2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(q + \rho)\left(\frac{3}{2}\right)^q} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q\left(\frac{3}{2}\right)^q}, \tag{14}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} L &= \frac{21}{8} - \log 2 + \frac{9}{4} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{(q + \rho - 2)\left(\frac{3}{2}\right)^q} \\ &= \frac{21}{8} - \log 2 + \frac{9}{4(\rho - 2)} F\left(1, \rho - 2, \rho, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Il reste à calculer $\prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right)$; le logarithme de cette expression est

$$\sum_{n=n'+1}^{n=+\infty}\left[\frac{r^4}{8R_n^4}+\frac{r^3}{3R_n^3}+\frac{r^5}{40R_n^5}+\dots\right.$$
$$\left.+(-1)^{q+1}\frac{1.3\dots(2q-3)}{1.2\dots q}\,\frac{r^{2q+3}}{(2q+3)2^{3q}R_n^{2q+3}}+\dots\right];$$

si, dans la parenthèse, on remplace chaque terme par sa valeur absolue, on a une somme inférieure à $\frac{11}{8}\frac{r^3}{R_n^3}$ comme on le constate aisément, et comme la série $\sum \frac{1}{R_n^3}$ converge, on peut intervertir l'ordre des sommations, et écrire l'expression précédente :

$$\frac{1}{8}\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{r^4}{R_n^4}+\frac{1}{3}\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{r^3}{R_n^3}+\dots$$
$$+(-1)^{q+1}\frac{1.3\dots(2q-3)}{1.2\dots q}\,\frac{1}{(2q+3)2^{3q}}\sum_{n'+1}^{\infty}\frac{r^{2q+3}}{R_n^{2q+3}}+\dots$$

Par suite, en utilisant l'égalité (7), nous aurons

$$\log\prod_{n'+1}^{\infty}\mathrm{M}\left(\frac{r}{R_n}\right)$$
$$=n'(1+\varepsilon)\left[\frac{81\rho}{128(4-\rho)}+\frac{1}{3}\,\frac{\rho}{3-\rho}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\dots\right.$$
$$+(-1)^{q+1}\frac{1.3\dots(2q-3)}{1.2\dots q}$$
$$\left.\times\frac{\rho}{(2q+3)(2q+3-\rho)}\,\frac{3^{2q+3}}{2^{5q+3}}+\dots\right].$$

Nous allons tranformer le nombre entre crochets de la formule précédente en posant

$$\frac{\rho}{(2q+3)(2q+3-\rho)}=\frac{1}{4-\rho}-\frac{1}{2q+3}+\frac{2q-1}{(\rho-4)(2q+3-\rho)}.$$

égalité qui s'obtient en décomposant la fraction rationnelle en q

$$\frac{\rho}{(2q-1)(2q+3)(2q+3-\rho)},$$

en fractions simples ; nous obtenons alors

$$(15)\quad \log \prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = n'(1+\varepsilon)\left[\frac{81\rho}{128(4-\rho)} + \frac{27}{8}\,\frac{1}{4-\rho}P - Q + \frac{27}{8}\,\frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)}R\right],$$

où nous avons

$$P = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}\right) + \ldots + (-1)^{q+1}\frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q\; 2^q}\left(\frac{9}{16}\right)^q + \ldots = \left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4},$$

$$Q = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \ldots + (-1)^{q+1}\frac{1.3\ldots(2q-3)}{1.2\ldots q} \times \frac{1}{2q+3}\,\frac{1}{2^{3q}}\left(\frac{3}{2}\right)^{2q+3} + \ldots = \int_0^{\frac{2}{3}} x^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$R = 1 + \ldots + (-1)^q \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+q-1\right)}{1.2\ldots q} \times \frac{\frac{3-\rho}{2}}{\frac{5-\rho}{2}+q-1}\left(\frac{9}{16}\right)^q + \ldots = F\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right).$$

Le calcul numérique de Q se fait immédiatement : on a

$$Q = \int_0^{\frac{2}{3}} x^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-t^2)(1+t^2)^2}{2t^5}\,dt = -\log 2 + 2 - \frac{1}{128};$$

en portant ces valeurs dans l'égalité (15), on obtient, après quelques réductions,

$$(16)\quad \log \prod_{n'+1}^{\infty} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right)$$
$$= n'(1+\varepsilon)\left[\log 2 - \frac{21}{8} + \frac{27}{4}\,\frac{1}{4-\rho} + \frac{27}{8}\,\frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)} \times \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right)\right] = n'(1+\varepsilon)\mathrm{S}.$$

La comparaison des égalités (13) et (16) nous donne alors, à la condition de prendre n' assez grand, pour que $n_0 \log r$ soit négligeable, ainsi que $\prod_{1}^{n_0} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right)$;

$$\mathrm{M}(r) \leqq \prod_{1}^{\infty} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right) = e^{n'(1+\varepsilon)\mathrm{H}_3}$$

où le nombre H_3 est égal à $\mathrm{L}+\mathrm{S}$; donc

$$(17)\quad \mathrm{H}_3 = \mathrm{L}+\mathrm{S} = \frac{27}{4}\,\frac{1}{4-\rho} + \frac{9}{4(\rho-2)} \times \mathrm{F}\left(1, \rho-2, \rho, \frac{2}{3}\right) + \frac{27}{8}\,\frac{1}{(4-\rho)(3-\rho)} \times \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{3-\rho}{2}, \frac{5-\rho}{2}, -\frac{9}{16}\right);$$

le calcul de ce nombre H_3 revient au calcul de deux séries qui convergent à la façon de progressions géométriques.

Enfin, on voit, comme au paragraphe précédent, que

$$n' = (1+\varepsilon')\frac{r^{[1+\beta(r)]\rho}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho}},$$

$[1+\beta(x)]\rho$ étant un exposant net; par suite, nous obtenons l'inégalité

$$M(r) \leqq e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{2}{3}\right)^{\rho} H_3 r^{[1+\beta(r)]\rho}}, \tag{18}$$

où H_3 est le nombre défini par l'égalité (17). L'égalité a lieu sur une infinité de cercles (avec $\varepsilon \gtrless 0$), si les arguments des zéros sont convenablement choisis et si $r_n = R_n$.

5. *Généralisation de quelques résultats de M. Lindelöf.* — M. Denjoy a également montré que le maximum $M(u)$ de $E(x, p)$, pour $|x| = u$, satisfait à l'inégalité

$$M(u) < e^{A u^{\tau}} \qquad (p \leqq \tau \leqq p+1);$$

le nombre A est inférieur ou égal à *un*, pour $p \geqq 2$ [1]; pour $p = 1$ on a $A \leqq \nu$, ν désignant la racine de l'équation $x + \log(x-1) = 0$ ($\nu = 1,27, \ldots,$).

On peut, en appliquant ce résultat, préciser les résultats bien connus de M. Lindelöf; je les généraliserai en même temps en introduisant l'exposant net. En désignant toujours par n_0 un nombre tel que, pour $n > n_0$,

$$|\alpha(x)| < \eta, \qquad |x \log x \, \alpha'(x)| < \eta;$$

posons

$$M(r) = \prod_1^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right) = \prod_1^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n_0+1}^{n'} M\left(\frac{r}{R_n}\right) \prod_{n'+1}^{\infty} M\left(\frac{r}{R_n}\right),$$

n' étant défini ici par les inégalités

$$R_{n'} \leqq r < R_{n'+1}.$$

Nous aurons

$$\prod_1^{n_0} M\left(\frac{r}{R_n}\right) < e^{h n_0 r^p};$$

---

[1] *Thèse*, page 24.

puis

$$\prod_{n'+1}^{n'} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right) < e^{\mathrm{A}\, r^p \sum\limits_{n_0+1}^{n} \frac{1}{\mathrm{R}_n^p}}.$$

$$\prod_{n_0+1}^{\infty} \mathrm{M}\left(\frac{r}{\mathrm{R}_n}\right) < e^{\mathrm{A}\, r^{p+1} \sum\limits_{n'+1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{R}_n^{p+1}}}$$

En utilisant encore ici les inégalités

$$\sum_{n_0+1}^{n'} \frac{1}{\mathrm{R}_n^p} < \int_{n_0}^{n'} \frac{dx}{x^{\frac{p}{\rho}[1+\alpha(x)]}} = \frac{\rho\, n'}{\rho - p}\,\frac{1}{\mathrm{R}_{n'}^p}(1+\varepsilon').$$

$$\sum_{n'+1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{R}_n^{p+1}} < \int_{n'}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{p+1}{\rho}[1+\alpha(x)]}} = \frac{\rho\, n'}{p+1-\rho}\,\frac{1}{\mathrm{R}_{n'}^{p+1}}(1+\varepsilon'');$$

nous aurons, en prenant n' assez grand pour que $\frac{n_0\, r^p}{n}$ soit très petit,

$$\mathrm{M}(r) < e^{\frac{\rho \mathrm{A}}{(p+1-\rho)(\rho-p)} n'(1+\varepsilon)}.$$

En introduisant l'exposant net, on a

$$n' = r^{\rho[1+\beta(r)]} - \theta \qquad (0 < \theta < 1);$$

donc, nous obtenons, pour les fonctions de genre supérieur ou égal à *deux*, l'inégalité

$$(19) \qquad \mathrm{M}(r) < e^{\frac{\rho(1+\varepsilon)}{(p+1-\rho)(\rho-p)} r^{\rho[1+\beta(r)]}},$$

et pour les fonctions de genre *un*

$$(20) \qquad \mathrm{M}(r) < e^{\frac{1{,}27\,\rho(1+\varepsilon)}{(p-1-\rho)(\rho-p)} r^{\rho[1+\beta(r)]}}.$$

L'inégalité (19) peut être utilisée pour les fonctions de genre supérieur à *deux*, pour lesquelles le calcul d'une limite supérieure précise paraît beaucoup plus compliqué que pour les fonctions considérées précédemment. Il résulte d'ailleurs des calculs du paragraphe 2 que la limite supérieure exacte du logarithme de $M(r)$, est, quel que soit le genre, de la forme $K r^{\rho[1+\beta(r)]}$, où $\rho[1+\beta(x)]$ est un exposant net, et K une fonction de ρ seulement, et non de $\beta(x)$.

Enfin, le théorème de M. Jensen donne

$$M(r) > \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} > \left(\frac{r}{r_n}\right)^n,$$

quel que soit le nombre entier n. En désignant par n'' le nombre des zéros intérieurs au cercle de rayon $\frac{r}{h}$, on aura

$$M(r) > h^{n''};$$

la considération des cas où l'on aurait

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}},$$

quel que soit n, conduit à prendre $h = e^{\frac{1}{\rho}}$; or, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}},$$

si donc nous prenons r de façon que

$$n'' = \left(\frac{r}{\frac{1}{e\rho}}\right)^{\rho\left[1+\beta\left(\frac{r}{\frac{1}{e\rho}}\right)\right]} = \frac{(1+\varepsilon)\, r^{\rho[1+\beta(r)]}}{e},$$

nous aurons, pour une *infinité de valeurs de z*,

$$M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{e\rho} r^{\rho[1+\beta(r)]}}. \tag{21}$$

L'inégalité (21) est d'ailleurs la plus précise qu'on puisse obtenir. Il suffit, en effet, de reproduire en le modifiant un peu le raisonnement employé par M. Lindelöf à la page 64 de son Mémoire, pour voir qu'il existe des fonctions d'exposant net $\rho\,[1 + \beta(x)]$, et pour lesquelles on a, à partir d'une certaine valeur de r,

$$\mathrm{M}(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{\rho e} r^{\rho[1+\beta(r)]}}.$$

En résumé, on voit qu'étant donnée une fonction d'exposant net $\rho\,[1 + \beta(x)]$, *la limite supérieure pour r infini de l'expression*

$$\frac{\mathrm{M}(r)}{r^{\rho[1+\beta(r)]}}$$

est supérieure ou égale au nombre $\dfrac{1}{e\rho}$ *et inférieure ou égale à un nombre* K. *Ce nombre* K *est égal à* $\dfrac{\pi}{\sin \pi\rho}$ (¹) *lorsque le genre est zéro; à*

$$\frac{1}{2\rho}\left[\frac{4}{2-\rho} + 2\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{1}{(\rho+q-1)2^q}\right]$$
$$= \frac{2^{2-\rho}}{2-\rho} + \frac{2^{1-\rho}}{\rho-1}\,\mathrm{F}\left(1,\ \rho-1,\ \rho,\ \frac{1}{2}\right),$$

lorsque le genre est égal à un; à

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3-\rho}\frac{2}{4-\rho} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2-\rho}\frac{\mathrm{F}\left(1,\ \rho-2,\ \rho,\ \frac{2}{3}\right)}{\rho-2}$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\right)^{3-\rho}\frac{\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3-\rho}{2},\ \frac{5-\rho}{2},\ -\frac{9}{16}\right)}{(4-\rho)(3-\rho)},$$

lorsque le genre est deux; enfin K *est inférieur à*

$$\frac{\rho}{(p+1-\rho)(\rho-p)},$$

lorsque le genre p est supérieur à deux.

(¹) *Voir* l'article déjà cité des *Nouvelles Annales*.

Dans le cas où, quel que soit $n < n_0$, on a

$$r_n = n^{\frac{1+\alpha(n)}{\rho}},$$

le dernier calcul du paragraphe 2, appliqué à l'inégalité de Jensen donne

$$M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{\rho} r^{\rho[1+\beta(r)]}},$$

cette inégalité est la plus précise qu'on puisse obtenir, tant qu'on ne fait aucune hypothèse sur les arguments des zéros [1].

On peut également introduire le nombre des zéros compris dans le cercle de rayon r : soit n ce nombre ; pour une infinité de valeurs du nombre n'' défini plus haut, on a

$$n'' = \frac{r^{\rho[1+\beta(r)]}}{e}(1+\varepsilon),$$

et comme $n \leqq r^{\rho[1+\beta(x)]}$, nous aurons

$$n'' > \frac{n}{e}(1+\varepsilon), \qquad r^{\rho[1+\beta(r)]} < en(1+\varepsilon);$$

et, par suite,

$$(22) \qquad (1-\varepsilon)\frac{1}{\rho e} n < \log M(r) < (1+\varepsilon)Ken,$$

inégalité valable pour une infinité de valeurs de n. Cette double inégalité pourra servir dans l'énoncé des réciproques; tous les résultats de M. Lindelöf relatifs au cas où

$$r^{\rho[1+\beta(r)]} = A r^{\rho}(\log r)^{\alpha_1}(\log_2 r)^{\alpha_2}\dots(\log_k r)^{\alpha_k},$$

s'étendent immédiatement au cas général.

---

[1] On le voit en appliquant la méthode employée par M. Lindelöf (p. 68).