Nouvelles annales de mathématiques

M. Michoux

Sur les coordonnées linéaires générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 281-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__281_1>

[R3a]

SUR LES COORDONNÉES LINÉAIRES GÉNÉRALES;

PAR M. M. MICHOUX,
Élève de Mathématiques spéciales à Clermont-Ferrand.

1. Nous nous proposons de définir ici un système général de coordonnées pour les vecteurs et systèmes de vecteurs. Ces coordonnées, qu'on pourrait appeler *coordonnées linéaires générales*, offrent la plus grande analogie avec les coordonnées pentasphériques générales de feuillets sphériques dont M. J. Haag a exposé la théorie dans une Note du numéro de février 1911 des *Nouvelles Annales*. Nous allons reprendre systématiquement les différents résultats contenus dans cette Note et les étendre au cas qui nous intéresse.

2. Nous rappellerons d'abord rapidement quelques résultats et quelques définitions bien connus.

Étant donnés deux vecteurs $(A_1 B_1)$, $(A_2 B_2)$ par leurs six coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1)$, $(X_2, Y_2, \ldots, N_2)$ relatives à un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, leur *moment relatif*, que nous désignerons par la notation θ_{12}, et qui peut être défini comme étant égal à six fois le volume algébrique du tétraèdre construit sur les deux vecteurs, est donné par la formule

$$\theta_{12} = L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1.$$

Plus généralement étant donnés deux systèmes de vecteurs (S) et (S′) par leurs coordonnées (X, Y, Z, L, M, N) et $(X', Y', \ldots, N')$ leur moment relatif a pour expression

$$(1) \qquad \theta(S, S') = LX' + MY' + NZ' + L'X + M'Y + N'Z$$

et représente six fois la somme algébrique des volumes de tous les tétraèdres obtenus en associant successivement tous les vecteurs du système (S) avec tous les vecteurs du système (S′).

Dans le cas où (S′) se confond avec (S), l'expression précédente devient

$$(2) \qquad \theta(S) = 2LX + 2MY + 2NZ$$

et prend le nom d'*automoment* du système (S). Les systèmes d'automoment nul sont ceux qui sont réductibles à un vecteur unique.

3. Ceci rappelé, choisissons six systèmes fixes (S_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ de coordonnées $(X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i)$ et linéairement indépendants, c'est-à-dire tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_6 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & N_6 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Il est clair qu'à tout système (S) (X, Y, Z, L, M, N) on peut faire correspondre six nombres $x_1, x_2, \ldots, x_6$, non tous nuls, par les équations linéaires

$$(3)\qquad \begin{cases} X = \sum_{i=1}^{6} x_i X_i, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ N = \sum_{i=1}^{6} x_i N_i, \end{cases}$$

et réciproquement.

Les systèmes (S_i) seront appelés les *systèmes fondamentaux* et les nombres (x_i) seront les *coordonnées du système* (S) ou (x) par rapport à ces systèmes fondamentaux.

On peut les interpréter de la manière suivante : *ce sont les nombres par lesquels il faut multiplier tous les vecteurs de chaque système fondamental pour que l'ensemble des six nouveaux systèmes obtenus soit équivalent au système* (S).

Il est clair que le système (S_i) a toutes ses coordonnées nulles, sauf la coordonnée (x_i) qui est égale à l'unité.

L'automoment du système (S) devient la transformée de l'expression (2) par la substitution linéaire (3), c'est-à-dire une forme quadratique à six variables (x_i). Nous la désignerons par $\Omega(x)$, et nous l'appellerons la *forme quadratique fondamentale*. L'équation

$$(4)\qquad \Omega(x) = 0$$

caractérise les systèmes d'automoment nul, c'est-à-dire équivalents à un vecteur unique.

Si l'on se reporte à la formule (1) en se rappelant les propriétés d'invariance de la forme polaire, on voit que le moment relatif de deux systèmes (S), (S′) est

$$(5) \qquad \theta(S, S') = \Omega(x \mid x') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} x'_i \frac{\partial\Omega}{\partial x_i}.$$

Cela permet une interprétation très simple des coefficients de $\Omega(x)$. Si l'on pose

$$\Omega(x) = \sum\sum A_{ij} x_i x_j,$$

on voit immédiatement que le coefficient A_{ij} est égal au moment relatif des systèmes fondamentaux (S_i) et (S_j).

4. Nous appellerons *coordonnées adjointes du système* (S) les six nombres (y_i) définis par

$$y_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}.$$

Au moyen de ces coordonnées, la forme fondamentale $\Omega(x)$ se transforme en son adjointe $\omega(y)$.

L'automoment du système peut s'écrire

$$(6) \qquad \theta(S) = \Omega(x) = \omega(y) = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i.$$

De même le moment relatif de deux systèmes (S), (S′) s'écrit

$$(7) \quad \theta(S, S') = \Omega(x \mid x') = \omega(y \mid y') = \sum_{i=1}^{6} x'_i y_i = \sum_{i=1}^{6} x_i y'_i.$$

La définition des coordonnées adjointes nous conduit naturellement à celles des *systèmes fondamentaux adjoints* (σ_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Le système (σ_i) sera défini par les conditions suivantes :

toutes ses coordonnées (y) sont nulles, sauf la coordonnée (y_i) qui est égale à l'unité.

Il résulte des formules (6) et (7) que le système (σ_i) sera complètement défini par les conditions suivantes : *Ses cinq moments relatifs par rapport aux systèmes fondamentaux* (S_j) $(j \neq i)$ *sont nuls, et son moment relatif par rapport à* (S_i) *est égal à l'unité.*

Nous pouvons donner maintenant une interprétation très simple des coordonnées (x_i) et (y_i) du système (S) en appliquant les formules (7). On trouve en effet

$$\theta(S, \sigma_i) = \sum_{i=1}^{6} x_i y'_i = x_i,$$

$$\theta(S, S_i) = \sum_{i=1}^{6} x'_i y_i = y_i.$$

Les coordonnées (x_i) et (y_i) sont donc respectivement égales aux moments relatifs du système (S) par rapport aux systèmes (σ_i) et (S_i).

Il y a donc réciprocité complète entre les systèmes (σ_i) et (S_i). En posant

$$\omega(y) = \sum\sum a_{ij} y_i y_j,$$

on montrerait comme précédemment que le coefficient a_{ij} est égal au moment relatif des systèmes (σ_i) et (σ_j).

5. Les considérations qui précèdent nous permettent de retrouver immédiatement, avec une interprétation très simple, la généralisation bien connue des coordonnées plückériennes de droites [1]. Étant donnée une droite (D), si nous prenons sur (D) un vecteur quelconque, les coordonnées de ce vecteur varient

[1] *Voir* G. Kœnigs, *Géométrie réglée*, Chap. I.

proportionnellement quand on change sa grandeur. On peut donc prendre pour coordonnées homogènes de (D) six nombres x_i proportionnels aux moments relatifs de (D) par rapport aux systèmes (σ_i) et vérifiant la relation (4)

$$\Omega(x) = 0, \tag{4}$$

ou bien six nombres y_i proportionnels aux moments relatifs de (D) par rapport aux systèmes (S_i) et vérifiant la relation

$$\omega(y) = 0. \tag{8}$$

Des formules (7), (4), (8) résulte la condition bien connue de rencontre des deux droites (x) et (x')

$$\Omega(x \mid x') = \Omega(x - x') = 0 \tag{9}$$

ou

$$\omega(y - y') = 0.$$

6. Cherchons un ensemble de systèmes fondamentaux (S_i), dans lequel le système adjoint (σ_i) coïncide avec (S_i).

Pour cela il faut et il suffit que les moments relatifs de (S_i) par rapport aux cinq autres systèmes fondamentàux soient nuls [1], et que son automoment soit égal à l'unité.

Les formes quadratiques $\Omega(x)$ et $\omega(y)$ se réduisent donc à

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2, \qquad \omega(y) = \sum_{i=1}^{6} y_i^2;$$

et l'on a

$$y_i = x_i.$$

---

[1] On peut dire, en employant une locution empruntée à la théorie des complexes linéaires, que *les systèmes fondamentaux sont deux à deux orthogonaux.*

Par suite, il n'y a plus lieu de distinguer les coordonnées adjointes des coordonnées fondamentales. Dans le cas d'une droite on retrouve les coordonnées de Klein.

7. Un système également fort important est celui où l'on prend pour systèmes fondamentaux (S_i) les six vecteurs formés par les arêtes d'un tétraèdre. Prenons par exemple pour systèmes $(S_1), (S_2), \ldots, (S_6)$ les vecteurs

$$(A_1A_2),\quad (A_1A_3),\quad (A_1A_4),\quad (A_3A_4),\quad (A_4A_2),\quad (A_2A_3).$$

Cherchons la forme quadratique fondamentale. D'après la signification donnée plus haut des coefficients de cette forme, nous pouvons l'écrire immédiatement. On a, en supposant que le volume $A_1A_2A_3A_4$ soit égal à $\frac{1}{6}$,

$$\Omega(x) = 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6).$$

Cherchons les systèmes adjoints. Le système (σ_1) par exemple a un moment relatif nul par rapport aux systèmes (S_i) $(i \neq 1)$, et égal à l'unité par rapport au système S_1. De même pour les autres. La forme adjointe est donc

$$\omega(y) = 2(y_4y_1 + y_5y_2 + y_6y_3).$$

Les coordonnées adjointes (y_i) coïncident dans leur ensemble avec les coordonnées (x_i), mais les coordonnées égales n'ont pas même indice.

Les nombres x_i ou y_i sont appelés dans ce cas les *coordonnées tétraédriques* du système de vecteurs. Dans le cas d'un vecteur unique on retrouve les coordonnées de M. Kœnigs avec leur interprétation géométrique [1].

---

[1] *Voir* G. Kœnigs, *Leçons de Cinématique*.

Voici une application simple : cherchons les équations des surfaces du deuxième degré (il y en a une simple infinité) passant par le quadrilatère gauche $A_1 A_2 A_4 A_3 A_1$. Une génératrice variable rencontrant $A_1 A_2$ et $A_4 A_3$ appartient aux deux complexes spéciaux d'équations

$$x_1 = 0, \qquad x_4 = 0;$$

ses autres coordonnées vérifiant la relation (4), on a

$$x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0.$$

Une génératrice fixe du second système a des coordonnées (x'_i) satisfaisant de même aux équations

$$x'_2 = 0, \qquad x'_5 = 0, \qquad x'_1 x'_4 + x'_3 x'_6 = 0.$$

La condition de rencontre de ces deux droites se réduit d'après (9) à

$$x'_6 x_3 + x'_3 x_6 = 0.$$

Si donc m désigne une constante quelconque, les équations

$$x_1 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_3 = m x_6, \qquad x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0$$

définissent une quelconque des demi-quadriques qui s'appuient sur $A_1 A_2$ et $A_3 A_4$, et démontrent la propriété suivante :

Le rapport des volumes des tétraèdres construits, d'une part, sur un vecteur quelconque d'une génératrice variable d'un hyperboloïde et, d'autre part, sur deux vecteurs fixes, portés par deux génératrices du même système, est indépendant de la génératrice variable.