HENRI PERROTIN

Sur la théorie des lignes asymptotiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 289-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__289_0>

[O5j]

SUR LA THÉORIE DES LIGNES ASYMPTOTIQUES;

PAR M. HENRI PERROTIN.

Il nous a paru intéressant de résoudre la question suivante : « Choisir trois fonctions x, y, z de deux variables u, v, telles que, si on les considère comme les coordonnées d'un point mobile sur une surface, u et v soient les paramètres des lignes asymptotiques de cette surface » [1].

1. Soient x, y, z les coordonnées d'un point, mobile sur une surface, exprimées en fonction des paramètres u, v de ses lignes asymptotiques. Par ailleurs, soient P, Q, R les paramètres directeurs de la normale exprimés en fonction des mêmes variables; l'équation différentielle des lignes asymptotiques,

$$dP\, dx + dQ\, dy + dR\, dz = 0$$

doit se réduire à $du\, dv = 0$; on doit donc avoir

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial Q}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial Q}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial R}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

et, d'après la définition des fonctions P, Q, R,

$$(2)\qquad \begin{cases} P\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q\dfrac{\partial y}{\partial u} + R\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2mm] P\dfrac{\partial x}{\partial v} + Q\dfrac{\partial y}{\partial v} + R\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

[1] Le plan général de ce travail nous a été aimablement indiqué par M. V. Jamet, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

D'où se déduisent les relations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \lambda\left(Q\frac{\partial R}{\partial u} - R\frac{\partial Q}{\partial u}\right),\\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \lambda\left(R\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial R}{\partial u}\right),\\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \lambda\left(P\frac{\partial Q}{\partial u} - Q\frac{\partial P}{\partial u}\right);\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= \mu\left(Q\frac{\partial R}{\partial v} - R\frac{\partial Q}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \mu\left(R\frac{\partial P}{\partial v} - P\frac{\partial R}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \mu\left(P\frac{\partial Q}{\partial v} - Q\frac{\partial P}{\partial v}\right),\end{aligned}\right.$$

λ et μ représentant des fonctions de u et de v. Il est aisé de voir que $\lambda = -\mu$.

En vertu des relations (3), on trouve en effet

$$\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = \lambda\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\\ \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\end{vmatrix},$$

et similairement en s'appuyant sur les équations (4)

$$\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \mu\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\\ \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\end{vmatrix}.$$

Les deux déterminants ci-dessus sont égaux et de signes contraires ; de plus, les premiers membres des deux dernières équations sont égaux, ce dont on s'aperçoit en différentiant la première des équations (2) par rapport à v, la deuxième par rapport à u.

2. Soient encore

$$p = \sqrt{\lambda}\,P,$$
$$q = \sqrt{\lambda}\,Q,$$
$$r = \sqrt{\lambda}\,R,$$

on pourra remplacer les équations (3) et (4) par les suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u},\\ \frac{\partial y}{\partial u} &= r\frac{\partial p}{\partial u} - p\frac{\partial r}{\partial u},\\ \frac{\partial z}{\partial u} &= p\frac{\partial q}{\partial u} - q\frac{\partial p}{\partial u};\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= r\frac{\partial q}{\partial v} - q\frac{\partial r}{\partial v},\\ \frac{\partial y}{\partial v} &= p\frac{\partial r}{\partial v} - r\frac{\partial p}{\partial v},\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= q\frac{\partial p}{\partial v} - p\frac{\partial q}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

En comparant la première des équations (5) avec la première des équations (6) et tenant compte de la condition

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u},$$

on trouve, après simplification,

$$(7)\qquad q\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} - r\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Des quatre autres équations appartenant aux groupes (5) et (6), on déduira deux autres relations analogues, entraînant, avec la précédente, les proportions ci-dessous :

$$\frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}.$$

Soit Θ la valeur commune de ces trois rapports. Les fonctions p, q, r devront être trois intégrales d'une même équation de Moutard, savoir :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \Theta p, \tag{8}$$

ou Θ désigne une fonction de u et de v.

3. Réciproquement, si trois fonctions p, q, r de deux variables u, v vérifient une même équation de Moutard, elles sont proportionnelles aux paramètres directeurs de la normale à une certaine surface S, dont les lignes asymptotiques ont pour paramètres directeurs u, v.

En effet, deux de ces fonctions q, r, par exemple, vérifient l'équation

$$q\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} - r\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = 0;$$

on en déduira, par suite,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(r\frac{\partial q}{\partial v} - q\frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

On en conclura que les fonctions

$$q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u}, \quad r\frac{\partial q}{\partial v} - q\frac{\partial r}{\partial v}$$

sont les dérivées partielles d'une même fonction x, de telle sorte qu'on aura

$$\frac{\partial x}{\partial u} = q\frac{\partial r}{\partial u} - r\frac{\partial q}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = r\frac{\partial q}{\partial v} - q\frac{\partial r}{\partial v}.$$

On trouvera également deux autres fonctions y et z satisfaisant aux conditions (5) et (6) et, par suite, aux suivantes

$$p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}+r\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

$$p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}+r\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

ce qui démontre l'énoncé.

4. Signalons le cas où, dans l'équation (8), Θ se réduit à une constante a, et observons que la transformation

$$u=\frac{u_1}{a},\qquad v=\frac{v_1}{a}$$

nous conduit immédiatement au cas où $a=1$.

Nous rechercherons donc une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}=p, \tag{9}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

Pour $u=u_0$, cette intégrale se réduira à une fonction donnée V de v; et pour $v=v_0$, à une fonction donnée U de u. Il demeure d'ailleurs entendu que $U(u_0)$ et $V(v_0)$ auront une valeur commune A, celle que doit prendre l'intégrale p pour $u=u_0$ et $v=v_0$. Il faudra seulement que la fonction U soit uniforme et finie dans un domaine contenant le point u_0 et qu'il en soit de même pour la fonction V contenant le point v_0.

Remarquons d'abord que l'équation

$$\frac{d^2 p}{\partial u\,\partial v}=p, \tag{9}$$

admet une intégrale p_1, définie comme il suit :

$$(10)\quad p_1 = 1 + \frac{(u-u_0)(v-v_0)}{1^2} + \frac{(u-u_0)^2(v-v_0)^2}{1^2.2^2} + \dots + \frac{(u-u_0)^n(v-v_0)^n}{1^2.2^2\dots n^2} + \dots,$$

la somme de cette série étant uniforme et finie, quelques valeurs qu'on attribue aux variables u et v.

Elle admet également les intégrales p_2 et p_3, définies comme ci-dessous :

$$p_2 = \mathrm{U} + \frac{v-v_0}{1}\int_{u_0}^{u} \mathrm{U}(t)\,dt + \frac{(v-v_0)^2}{2!}\int_{u_0}^{u}(u-t)\,\mathrm{U}(t)\,dt + \dots + \frac{(v-v_0)^n}{n!}\int_{u_0}^{u}\frac{(u-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{U}(t)\,dt + \dots,$$

$$p_3 = \mathrm{V} + \frac{u-u_0}{1}\int_{v_0}^{v} \mathrm{V}(t)\,dt + \frac{(u-u_0)^2}{2!}\int_{v_0}^{v}(v-t)\,\mathrm{V}(t)\,dt + \dots + \frac{(u-u_0)^{n-1}}{(n-1)!}.\int_{v_0}^{v}\frac{(v-t)^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{V}(t)\,dt + \frac{(u-u_0)^n}{n!}\int_{v_0}^{v}\frac{(v-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{V}(t)\,dt + \dots.$$

On remarquera que la convergence uniforme de ces deux séries est assurée par les conditions imposées aux fonctions u, v, de sorte que l'intégrale p, définie par l'équation

$$p = p_2 + p_3 - \mathrm{A}p_1,$$

remplit toutes les conditions du problème.

Comme, d'autre part, les fonctions p_2 et p_3 se rattachent directement à la fonction p_1, il suffit de connaître celle-ci pour former l'intégrale p qui nous occupe.

Si nous désignons, en effet, par $p_1\,(u, v, u_0, v_0)$ le second membre de l'égalité (10), on a les deux identités suivantes :

$$p_2 = \mathrm{U} + \int_{u_0}^{u} \frac{\partial p_1(u, v, t, v_0)}{\partial u} \mathrm{U}(t)\, dt,$$

$$p_3 = \mathrm{V} + \int_{v_0}^{v} \frac{\partial p_1(u, v, u_0, t)}{\partial v} \mathrm{V}(t)\, dt.$$

L'intégrale générale cherchée se présente sous la forme

$$p = \mathrm{U} + \mathrm{V} - \mathrm{A}p_1 + \int_{u_0}^{u} \frac{\partial p_1(u, v, t, v_0)}{\partial u} \mathrm{U}(t)\, dt + \int_{v_0}^{v} \frac{\partial p_1(u, v, t, u_0)}{\partial v} \mathrm{V}(t)\, dt.$$

5. Montrons maintenant comment l'on peut exprimer simplement la courbure totale en chaque point de la surface définie comme il a été dit ci-dessus. [Nous aurons, à différentes reprises, l'occasion d'écrire une somme de trois termes, tels que chacun d'eux se déduit du précédent par une permutation circulaire effectuée sur les lettres x, y, z ou p, q, r. Nous abrégerons en écrivant simplement un terme de cette somme, précédé du signe S]. Rappelons d'abord la relation suivante ou ds et $d\sigma$ représentent la différentielle de l'arc et de l'angle de contingence d'une section normale.

$$1 = -\frac{dp\, dx + dq\, dy + dr\, dz}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\, ds\, d\sigma},$$

d'où l'on déduit, en appelant R le rayon de courbure de cette section,

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{-(dp\, dx + dq\, dy + dr\, dz)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\, ds^2}. \tag{11}$$

D'après les propriétés fondamentales des fonctions

p, q, r, le numérateur de la fonction inscrite au second membre peut être remplacé par

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\, dv,$$

ou encore par

$$\mathbf{S}\left[\frac{\partial p}{\partial u}\left(r\frac{\partial q}{\partial v}-q\frac{\partial r}{\partial v}\right)+\frac{\partial p}{\partial v}\left(q\frac{\partial r}{\partial u}-r\frac{\partial q}{\partial u}\right)\right] du\, dv,$$

ou enfin par

$$2\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv,$$

en vertu des formules (5) et (6). Soit Δ le déterminant qui figure dans cette dernière expression.

En vertu de ces mêmes relations, nous aurons

$$\begin{aligned} ds^2 = & \;\mathbf{S}\left[\left(q\frac{\partial r}{\partial u}-r\frac{\partial q}{\partial u}\right)du-\left(q\frac{\partial r}{\partial v}-r\frac{\partial q}{\partial v}\right)dv\right]^2 \\ = & \;\mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u}-r\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 du^2 \\ & -2\,\mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u}-r\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(q\frac{\partial r}{\partial v}-r\frac{\partial q}{\partial v}\right) du\, dv \\ & +\mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial v}-r\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 dv^2. \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u}-r\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2, \\ F &= -\mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial u}-r\frac{\partial q}{\partial u}\right)\left(q\frac{\partial r}{\partial v}-r\frac{\partial q}{\partial v}\right), \\ G &= \mathbf{S}\left(q\frac{\partial r}{\partial v}-r\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

on aura aussi

$$E = \quad (p^2+q^2+r^2)\left[\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right]$$
$$-\left(p\frac{\partial p}{\partial u}+q\frac{\partial q}{\partial u}+r\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = -(p^2+q^2+r^2)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}\right)$$
$$+\left(p\frac{\partial p}{\partial u}+q\frac{\partial q}{\partial u}+r\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(p\frac{\partial p}{\partial v}+q\frac{\partial q}{\partial v}+r\frac{\partial r}{\partial v}\right),$$

$$G = \quad (p^2+q^2+r^2)\left[\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2\right]$$
$$-\left(p\frac{\partial p}{\partial v}+q\frac{\partial q}{\partial v}+r\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2,$$

la formule (11) devient alors

$$(12)\qquad \frac{1}{R} = \frac{-2\Delta\, du\, dv}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,(E\, du^2+2F\, du\, dv+G\, dv^2)},$$

ou encore

$$\frac{1}{R} = \frac{-2\Delta}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\left(E\frac{du}{dv}+2F+G\frac{dv}{du}\right)};$$

on en conclut que le rayon de courbure R est maximum ou minimum, lorsqu'on a

$$E\frac{du}{dv} = G\frac{dv}{du}$$

ou

$$(13)\qquad \frac{du}{\sqrt{G}} = \pm\frac{dv}{\sqrt{E}}.$$

Nous avons donc ainsi obtenu l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface.

Si l'on veut obtenir les expressions des rayons de courbure principaux, on remplacera dans la relation (12) du et dv par les radicaux qui leur sont proportionnels en vertu de (13) : si donc on appelle R_1 et R_2 ces deux rayons, on aura

$$\frac{1}{R_1} = \frac{-\Delta}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}(\sqrt{EG}+F)},$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{+\Delta}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}(\sqrt{EG}-F)},$$

$$(14) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{-\Delta^2}{(p^2+q^2+r^2)(EG-F^2)}.$$

En partant des valeurs de E, F, G, données au début de ce paragraphe, on trouve par un calcul simple

$$EG - F^2 = (p^2+q^2+r^2)\begin{vmatrix} p^2+q^2+r^2 & \mathbf{S}\, p\frac{\partial p}{\partial u} & \mathbf{S}\, p\frac{\partial p}{\partial v} \\ \mathbf{S}\, p\frac{\partial p}{\partial u} & \mathbf{S}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 & \mathbf{S}\,\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} \\ \mathbf{S}\, p\frac{\partial p}{\partial v} & \mathbf{S}\,\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} & \mathbf{S}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (p^2+q^2+r^2)\Delta^2,$$

par suite

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{-1}{(p^2+q^2+r^2)^2},$$

relation extrêmement simple.

6. Nous terminerons cet exposé en cherchant quelles doivent être les fonctions p, q, r pour une surface à courbure constante. En tout point d'une pareille surface, on doit avoir

$$p^2+q^2+r^2 = a^2$$

(a étant une constante réelle ou imaginaire).

Posons $p = ap_1$, $q = aq_1$, $r = ar_1$ et supprimons les indices, il vient

$$(15) \qquad p^2+q^2+r^2 = 1.$$

Les proportions

$$\frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}$$

entraînent comme conséquence

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

et, en intégrant par rapport à v,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = f(u);$$

or on peut adopter au lieu de u la variable indépendante $\int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$ et, par suite, cette équation n'est pas plus générale que la suivante :

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = 1;$$

on aura, de façon similaire,

$$(17)\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

La relation (15) nous conduit à considérer p, q, r comme les coordonnées d'un point mobile sur une sphère de rayon unité et, par suite, à poser

$$p = \cos\varphi \sin\theta,$$
$$q = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$r = \cos\theta.$$

Par ailleurs, le ds^2 de la sphère a pour valeur

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

Développons par rapport à du, dv et rapprochons le développement trouvé des équations (16) et (17), il vient

$$
(18) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{\partial u}\right)^2 = 1, \\
&\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2 = 1.
\end{aligned}
\right.
$$

L'élimination de φ entre ces deux équations nous montre que la fonction θ est définie par l'équation aux dérivées partielles ci-dessous :

$$\pm\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1-\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{1-\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}\right].$$

On ne connaît pas l'intégrale générale de cette équation aux dérivées partielles, mais il serait aisé, comme cas particulier, de trouver la fonction θ relative aux surfaces de révolution à courbure totale constante.