NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HAAG

Sur la déformation infiniment petite des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 312-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__312_1>

[O4g]

SUR LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. J. HAAG, à Clermont-Ferrand.

Je me propose de développer ici quelques résultats intéressants qui se rattachent à la déformation infiniment petite des surfaces réglées et que j'ai résumés en partie dans deux Communications à l'Académie des Sciences (19 avril et 24 avril 1909).

I.

1. Rappelons d'abord (¹) que les équations de toute

(¹) *Voir* G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 24 et suiv.

surface (S) non développable rapportée à ses lignes asymptotiques peuvent s'écrire

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}
x &= \int\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right)d\beta,\\
y &= \int\left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right)d\beta,\\
z &= \int\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right)d\beta,
\end{aligned}\right.$$

ou θ_1, θ_2, θ_3 sont trois solutions d'une équation de la forme

$$(\mathrm{B})\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=k\theta,$$

et représentent d'ailleurs des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale en M (α, β), et liées, de plus, par la relation

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=\sqrt{-\mathrm{R}\mathrm{R}'},$$

où R et R′ désignent les rayons de courbure principaux de la surface en M. De sorte que, pour une surface et un point donnés, ces trois fonctions ont des valeurs parfaitement déterminées (¹).

Si ω est une solution quelconque de (B), la surface (S_1) la plus générale qui corresponde à (S) avec orthogonalité des éléments est donnée par les formules

$$(\mathrm{C})\quad\left\{\begin{aligned}
x_1 &= \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right)d\beta,\\
y_1 &= \int\left(\theta_2\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\omega\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\left(\theta_2\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\omega\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right)d\beta,\\
z_1 &= \int\left(\theta_3\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\omega\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\left(\theta_3\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\omega\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right)d\beta,
\end{aligned}\right.$$

(¹) Il convient cependant de remarquer que la surface ne change pas si l'on change les signes des θ_i et qu'elle se transforme en sa symétrique par rapport à l'origine si l'on multiplie tous les θ_i

Remarquons que deux solutions différentes ω et ω' de (B) ne peuvent jamais donner la même surface (S_1), car s'il en était ainsi, on aurait

$$\theta_1 \frac{\partial(\omega - \omega')}{\partial\alpha} - (\omega - \omega') \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} = 0,$$

et les équations analogues en θ_2 et θ_3. Ces équations ne sont compatibles que pour $\omega = \omega'$, car les déterminants tels que $\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}$ ne peuvent être tous trois nuls, sans quoi la surface (S) se réduirait à une courbe.

2. Cela posé, cherchons ce que doivent être les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, k$ pour que la surface (S) soit une surface réglée, dont les génératrices rectilignes aient pour paramètre α.

Considérons le point m de coordonnées $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. La droite Om est parallèle à la normale en M à (S); elle est donc dans le plan (π) mené par O perpendiculairement à la génératrice D qui passe par M. Ce plan enveloppe, lorsque α varie, le cône supplémentaire du cône directeur de la surface. Nous supposerons que ce dernier ne se réduit pas à un plan, nous réservant *d'examiner plus tard le cas des surfaces à plan directeur*. Dans ces conditions, soient a, b, c, les coordonnées (fonctions de α) d'un point quelconque n de la caractéristique du plan (π), c'est-à-dire de la perpendiculaire OA au plan asymptote de (S), lequel est, comme on sait, parallèle au plan tangent au cône

---

par $\sqrt{-1}$. Ceci prouve en particulier qu'on ne peut avoir toutes les surfaces réelles à lignes asymptotiques réelles en se bornant à considérer les solutions réelles de (B); il faut leur adjoindre les solutions imaginaires pures.

directeur. Quand α varie, n décrit une courbe tangente au plan (π), de sorte que les dérivées a', b', c' de a, b, c par rapport à α sont les coordonnées d'un poiut de (π) non situé sur On ([1]). Il suit de là que θ_1, θ_2, θ_3, qui sont les coordonnées d'un point de (π), peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\quad \theta_1 = \lambda a + \mu a', \qquad \theta_2 = \lambda b + \mu b', \qquad \theta_3 = \lambda c + \mu c',$$

λ et μ désignant deux fonctions convenables de α et β. Écrivons que θ_1 vérifie (B)

$$(2)\quad a\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\lambda\right) + a'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\mu\right) + a''\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0.$$

On a deux équations analogues obtenues en remplaçant a par b et c. Remarquons à présent que le déterminant $\| a \quad a' \quad a'' \|$ ne saurait être nul, sans quoi la courbe lieu de n serait dans un plan passant par O et la droite D serait constamment perpendiculaire à ce plan, ce qui n'est pas possible, puisque la surface (S) serait alors cylindrique. Les équations telles que (2) entraînent donc les suivantes

$$(3)\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\lambda = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\mu = 0, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0.$$

La dernière nous montre que μ ne dépend que de α. Rappelons-nous maintenant que le point n a été choisi arbitrairement sur la droite OA; nous pouvons donc, sans rien changer à la surface (S), remplacer a, b, c, par ρa, ρb, ρc, ρ étant une fonction quelconque de α. Dans ces conditions, θ_1, par exemple, devient égal à $(\lambda\rho + \mu\rho')a + \mu\rho a'$. Comme μ ne peut être nul (sans quoi Om décrirait un cône, la surface serait dévelop-

---

[1] Ceci serait précisément en défaut si la surface était à plan directeur, car, dans ce cas, la droite OA serait fixe, puisque perpendiculaire au plan directeur.

pable), on peut prendre $\mu\rho = 1$. Cela revient évidemment à *supposer* $\mu = 1$ *dans les formules* (1). Moyennant cette hypothèse, les équations (3) se réduisent à

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\lambda = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} - k = 0. \tag{4}$$

Éliminons k, il vient

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\lambda = 0. \tag{5}$$

Intégrons par rapport à β :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\lambda^2 = A'_1 - \frac{1}{2}A_1^2, \tag{6}$$

en appelant A_1 une fonction arbitraire de α. Nous obtenons une équation de Riccati, dont nous connaissons une solution particulière A_1. En l'intégrant par la méthode habituelle, on est conduit, pour éviter les quadratures, à poser successivement

$$A_1 = -\frac{A'_2}{A_2}, \qquad A_2 = -\frac{1}{2A'}.$$

L'intégrale générale de l'équation (6), et par suite de (5), s'écrit alors

$$\lambda = \frac{A''}{A'} - \frac{2A'}{A+B},$$

où A et B sont deux fonctions arbitraires de α et β respectivement. La deuxième équation (4) nous donne ensuite

$$k = \frac{2A'B'}{(A+B)^2}.$$

Nous pouvons d'ailleurs simplifier ces expressions par un choix convenable des paramètres α et β, qui, jusqu'à présent, ont été supposés pris d'une manière quelconque. Si l'on remarque qu'aucune des fonctions A et B ne peut se réduire à une constante (comme on le voit en portant, dans une telle hypothèse, la valeur de λ dans les expressions (1) de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$), on a le droit de choisir A pour paramètre α et B pour paramètre β. Dans ces conditions, on a

$$\lambda = -\frac{2}{\alpha+\beta}, \qquad k = \frac{2}{(\alpha+\beta)^2};$$

puis,

$$(7) \quad \theta_1 = -\frac{2a}{\alpha+\beta} + a', \quad \theta_2 = \frac{-2b}{\alpha+\beta} + b', \quad \theta_3 = \frac{-2c}{\alpha+\beta} + c'.$$

Quand à l'équation (B), elle devient

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{2\theta}{(\alpha+\beta)^2}.$$

On reconnaît *l'équation à invariants égaux dont l'intégrale générale est du second rang* (*cf.* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 143). Cette intégrale générale est, comme on sait,

$$(9) \qquad \omega = \frac{2(A+B)}{\alpha+\beta} - (A'+B'),$$

en appelant A une fonction arbitraire de α et B une fonction arbitraire de β.

Si nous portons maintenant ces valeurs de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, ω dans (A) et (C), nous obtenons sans difficulté

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} x = \dfrac{2(cb'-bc')}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (b'c''-c'b'')\,d\alpha, \\[2ex] y = \dfrac{2(ac'-ca')}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (c'a''-a'c'')\,d\alpha, \\[2ex] z = \dfrac{2(ba'-ab')}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (a'b''-b'a'')\,d\alpha, \end{cases}$$

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} x_1 = a'B' + \dfrac{2(aA'-a'A-aB'-a'B)}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (A'a''-A''a')\,d\alpha, \\[2ex] y_1 = b'B' + \dfrac{2(bA'-b'A-bB'-b'B)}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (A'b''-A''b')\,d\alpha, \\[2ex] z_1 = c'B' + \dfrac{2(cA'-c'A-cB'-c'B)}{\alpha+\beta} + \displaystyle\int (A'c''-A''c')\,d\alpha. \end{cases}$$

Dans ces formules, *les trois fonctions* a, b, c *peuvent être choisies arbitrairement*, sous la seule condition

$$\delta = \| a \quad a' \quad a'' \| \neq 0 \; ; \tag{10}$$

car, quelles qu'elles soient, θ_1, θ_2, θ_3 vérifient bien (8) et, en outre, les lignes (α) de la surface représentée par les équations (D) sont visiblement des droites.

Finalement, nous avons, en (D), *les équations de la surface réglée* (S) *la plus générale n'ayant pas de plan directeur et rapportée à ses lignes asymptotiques; les équations* (E) *définissent la surface* (S_1) *la plus générale qui corresponde à* (S) *avec orthogonalité des éléments.*

M. Goursat est arrivé à ces résultats dès 1896, en cherchant des applications de certaines propriétés générales des équations linéaires et de la méthode de Laplace (*Sur les équations linéaires et la méhode de Laplace*, *American Journal of Mathematics*, t. XVIII, n° 4; *Sur les lignes asymptotiques*, *Bull. de la Soc. math. de France*, 1896; *Comptes rendus*, 9 mars 1896). Il a même indiqué le moyen de se débarrasser des quadratures qui figurent dans les deux groupes de formules, ce qu'avait d'ailleurs déjà fait M. Kœnigs, pour les surfaces réglées seulement, par une méthode entièrement différente (*Comptes rendus*, 2 janvier 1888).

3. Avant d'aborder l'étude des propriétés géométriques qu'on peut déduire des formules précédentes, nous allons présenter quelques remarques, qui seront très utiles dans la suite.

Posons-nous d'abord la question suivante : *Une surface réglée* (S) *étant donnée, y a-t-il plusieurs manières de mettre ses équations sous la forme* (D)?

Autrement dit, peut-on trouver trois nouvelles fonctions a_0, b_0, c_0 de α donnant naissance à la même surface que les trois fonctions a, b, c? S'il en est ainsi, à tout point M de (S) correspondent deux systèmes de coordonnées (α, β) et (α_0, β_0), et comme, pour chacun d'eux, les lignes coordonnées sont les asymptotiques, α_0 est nécessairement une fonction de α et β_0 une fonction de β. De plus, les fonctions $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ de α_0, β_0 qui correspondent au deuxième système prennent nécessairement, au point M, les mêmes valeurs que les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de α, β ou que les fonctions $-\theta_1$, $-\theta_2$, $-\theta_3$, comme cela résulte de la signification géométrique de ces quantités (n° 1) [1].

On a donc, par exemple, l'identité suivante

$$\theta'_1(\alpha_0, \beta_0) \equiv \theta_1(\alpha, \beta). \tag{11}$$

En outre,

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k(\alpha, \beta).\,\theta_1, \qquad \frac{\partial^2 \theta'_1}{\partial\alpha_0\,\partial\beta_0} = k(\alpha_0, \beta_0).\,\theta'_1. \tag{12}$$

Or, de (11) on tire

$$\frac{\partial^2 \theta'_1}{\partial\alpha_0\,\partial\beta_0} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{d\alpha}{d\alpha_0}\,\frac{d\beta}{d\beta_0};$$

en portant dans (12), il vient

$$k(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta \equiv k(\alpha_0, \beta_0)\,d\alpha_0\,d\beta_0.$$

Le changement de variables $(\alpha \mid \alpha_0, \beta \mid \beta_0)$ doit donc transformer en lui-même l'élément linéaire

$$ds^2 = k(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta. \tag{13}$$

---

[1] *Cette condition nécessaire est aussi suffisante*, car les formules (A) conservent la même forme après tout changement de variables qui ne change pas les lignes coordonnées.

Or, dans le cas actuel, cet élément linéaire est

$$ds^2 = \frac{2\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha + \beta)^2}.$$

On reconnaît l'élément linéaire d'une sphère et l'on sait que la transformation la plus générale qui le laisse invariant est donnée par les formules

$$\alpha_0 = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}, \qquad \beta_0 = \frac{m\beta - n}{-p\beta + q}, \tag{14}$$

où m, n, p, q sont quatre constantes arbitraires (¹).

Si maintenant on remplace, dans (11), θ_1 et θ'_1 par leurs valeurs tirées de (7), on a l'identité

$$-\frac{2a_0}{\alpha_0 + \beta_0} + \frac{da_0}{d\alpha_0} \equiv \frac{-2a}{\alpha + \beta} + \frac{da}{d\alpha};$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (14), l'unique condition

$$a_0 = a\,\frac{mq - np}{(p\alpha + q)^2}. \tag{15}$$

Si l'on avait supposé $\theta'_1 = -\theta_1$, on serait encore arrivé à (13), donc à (14); seulement (15) aurait été remplacé par

$$a_0 = -a\,\frac{mq - np}{(p\alpha + q)^2}. \tag{16}$$

Finalement, la question que nous nous étions posée est entièrement résolue et admet la réponse suivante : *La surface* (S) *étant donnée sous la forme* (D), *la manière la plus générale de l'obtenir sous la même forme consiste à faire le changement de variables* (14) *et à remplacer les fonctions a, b, c de α par les fonctions a_0, b_0, c_0 de α_0 déduites des précédentes par les formules* (15) *ou* (16).

(¹) *Cf.* Darboux, *loc cit.*, t. I. p. 30, 31.

4. On peut se poser une question analogue pour la surface (S_1) : *Les fonctions* a, b, c *étant données, peut-on trouver deux couples de fonctions* (A, B) et (A_1, B_1) *qui, substituées dans les formules* (E), *donnent les mêmes valeurs pour* x_1, y_1, z_1?

Nous savons (n° 1) que les valeurs correspondantes de ω doivent être nécessairement identiques. D'où il résulte, suivant la formule (9), que les différences $A_2 = A_1 - A$, $B_2 = B_1 - B$ doivent satisfaire à l'identité

$$A'_2 + B'_2 - \frac{2(A_2 + B_2)}{\alpha + \beta} = 0.$$

Or, si l'on donne à β une valeur numérique quelconque, on a une équation différentielle linéaire du premier ordre en A_2; en l'intégrant, on constate que A_2 doit être un trinome du second degré en α. De même, B_2 doit être un trinome du second degré en β. En employant la méthode des coefficients indéterminés, on arrive immédiatement au résultat suivant :

Pour que les fonctions A_1, B_1 *donnent pour* x_1, y_1, z_1, *les mêmes valeurs que les fonctions* A, B, *il faut et il suffit qu'on puisse trouver trois constantes* m, n, p *telles que*

$$(17) \quad A_1 = A + m\alpha^2 + n\alpha + p, \qquad B_1 = B - m\beta^2 + n\beta - p.$$

5. Nous terminerons nos remarques préliminaires par l'introduction de l'équation différentielle

$$(18) \qquad \theta''' + \lambda\theta'' + \mu\theta' + \nu\theta = 0,$$

dont les coefficients λ, μ, ν sont entièrement déterminés par la condition que l'équation soit vérifiée par les trois fonctions linéairement indépendantes a, b, c.

Cette équation caractérise la surface (S), *aux* *transformations homographiques près qui conservent le plan de l'infini.*

En effet, soient a_0, b_0, c_0 trois quelconques de ses solutions, qui soient linéairement indépendantes, on a

$$(19)\qquad \begin{cases} a_0 = ma + m_1 b + m_2 c, \\ b_0 = na + n_1 b + n_2 c, \\ c_0 = pa + p_1 b + p_2 c, \end{cases}$$

$m, m_1, \ldots, p_2$ désignant neuf constantes dont le déterminant n'est pas nul.

Calculons les valeurs correspondantes de x_0, y_0, z_0 que donnent les formules (D). A cet effet, nous remarquons que les quantités $c_0 b'_0 - b_0 c'_0$ et $c''_0 b'_0 - b''_0 c'_0$ peuvent être regardées comme les produits respectifs de la matrice $\begin{Vmatrix} n & n_1 & n_2 \\ p & p_1 & p_2 \end{Vmatrix}$ par les matrices $\begin{Vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{Vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{Vmatrix}$. On en conclut que, si M, $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{P}_2$ sont les mineurs de Δ relatifs à $m, m_1, m_2, \ldots, p_2$, on a en négligeant les constantes additives qui proviennent des quadratures,

$$(20)\qquad \begin{cases} x_0 = \mathrm{M}x + \mathrm{M}_1 y + \mathrm{M}_2 z, \\ y_0 = \mathrm{N}x + \mathrm{N}_1 y + \mathrm{N}_2 z, \\ z_0 = \mathrm{P}x + \mathrm{P}_1 y + \mathrm{P}_2 z, \end{cases}$$

formules qui définissent bien la transformation homographique la plus générale conservant le plan de l'infini.

On peut utiliser cette proposition pour *simplifier l'étude des propriétés projectives de* S. Par exemple, cherchons la *condition pour que la ligne* (β) *soit une droite.* D'après ce qui précède, cette condition ne doit intéresser que les fonctions λ, μ, ν. Pour l'obtenir rapidement, nous pouvons supposer qu'on a ramené la droite en question à être dirigée suivant Oz. Si nous écrivons alors que la normale le long de la ligne (β) reste perpendiculaire à Oz, ce qui s'exprime par $\theta_3 = 0$, nous obtenons ([1])

$$c' - \frac{2c}{\alpha + \beta} = 0.$$

d'où

$$c = m(\alpha + \beta)^2, \qquad (m = \text{const.}).$$

En portant dans (18), nous obtenons la condition cherchée

$$(21) \qquad 2\lambda + 2\mu(\alpha + \beta) + \nu(\alpha + \beta)^2 = 0.$$

Pour que la surface possède deux droites (β), il faut et suffit que l'équation (21) admette deux racines constantes en β, ce qui donne les deux conditions

$$\frac{\mu}{\nu} + \alpha = \text{const.}, \qquad \frac{2\lambda}{\nu} + \frac{2\mu\alpha}{\nu} + \alpha^2 = \text{const.}$$

Pour que la surface (S) *soit du second degré*, il faut et suffit que l'équation (21) soit vérifiée quel que soit β; d'où les conditions

$$\lambda = \mu = \nu = 0.$$

Dans le cas où il y a une seule droite (β), on peut, grâce à la transformation (14), supposer qu'elle correspond à la valeur $\beta = \infty$; la condition (21) se réduit alors à $\nu = 0$. Il peut arriver que *cette droite compte pour deux*, c'est-à-dire que la valeur correspondante de β soit racine double de l'équation (21); en supposant toujours cette racine infinie, cela se traduit par les

---

([1]) Cette condition évidemment nécessaire est aussi suffisante, car si le plan tangent en chaque point de la ligne (β) est parallèle à Oz, cette ligne est forcément une droite parallèle à Oz, puisque tous ses plans osculateurs sont parallèles à cette droite.

conditions $\mu = \nu = 0$. Ce cas se distingue du précédent par le fait que *la variation du plan tangent le long de la droite considérée obéit à la loi de Chasles*. Ceci peut s'établir d'une manière intuitive en supposant que la surface possède deux droites (β) infiniment voisines.

Quant à la démonstration analytique rigoureuse, elle peut se faire de la manière suivante. Prenant, comme plus haut, la droite pour axe des z, on trouve sans peine que le plan tangent au point M (α, ∞) a pour équation

$$a'X + \theta'\Psi = 0.$$

d'autre part, la cote de M est

$$z = \int (a'b'' - b'a'')\,dx.$$

Le lecteur établira aisément que pour que z soit fonction homographique de $\frac{b'}{a'}$, il faut et suffit qu'on ait une identité de la forme.

$$ma' + nb' = p \qquad (m, n, p = \text{const.}).$$

On peut d'ailleurs, par une substitution telle que (19), supposer $n = 0$, c'est-à-dire égaler a' à une constante, d'ailleurs non nulle à cause de (10). En portant cette hypothèse dans (18) (où l'on suppose, bien entendu, $\nu = 0$), on trouve immédiatement que la condition cherchée est $\mu = 0$.

II.

Nous allons maintenant passer en revue les conséquences diverses qui découlent des formules (D) et (E), des remarques précédentes et des propriétés générales de la déformation infiniment petite des surfaces.

6. *Étude de* (S). — Voyons, en premier lieu, comment les équations (D) permettent d'étudier les principales propriétés de la surface réglée.

Rappelons d'abord que les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan asymptote sont proportionnels à a, b, c; nous les désignerons par $\frac{a}{\rho}, \frac{b}{\rho}, \frac{c}{\rho}$, en posant, par suite,

$$(22) \qquad \rho^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ceux de la génératrice sont, de même,

$$(23) \qquad \frac{cb' - bc'}{\rho_1}, \qquad \frac{ac' - ca'}{\rho_1}, \qquad \frac{ba' - ab'}{\rho_1},$$

avec

$$(24) \qquad \rho_1^2 = \mathrm{S}\,(cb' - bc')^2 = \rho^2(\sigma^2 - \rho'^2),$$

en posant

$$(25) \qquad \sigma^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Enfin, ceux de la normale en M sont

$$\frac{\theta_1}{\rho_2}, \qquad \frac{\theta_2}{\rho_2}, \qquad \frac{\theta_3}{\rho_2},$$

en posant

$$(26) \qquad \rho_2^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \sigma^2 - \rho'^2 + \left(\frac{2\rho}{\alpha + \beta} - \rho'\right)^2.$$

On sait d'ailleurs que $\rho_2^4 = -\mathrm{RR}'$ (n° 1). On sait aussi, d'après la formule d'Enneper, que ρ_2^2 est égal, au signe près, au rayon de torsion τ de la ligne (β) qui passe par M. C'est ce qu'il est aisé de vérifier par une méthode directe, qui vous donnera, du même coup, le signe de τ.

D'après ce qui a été vu au n° 3, nous pouvons nous borner à considérer la ligne $\beta = \infty$. La courbe étant supposée orientée d'une manière quelconque et s désignant son arc, les cosinus directeurs de sa tangente et de sa binormale sont respectivement

$$(b'c''-c'b'')\frac{d\alpha}{ds},\qquad (c'a''-a'c'')\frac{d\alpha}{ds},\qquad (a'b''-b'a'')\frac{d\alpha}{ds};$$

$$\frac{\theta_1}{\rho_2}=\frac{a'}{\sigma},\qquad \frac{\theta_2}{\rho_2}=\frac{b'}{\sigma},\qquad \frac{\theta_3}{\rho_2}=\frac{c'}{\sigma}.$$

On en déduit ceux de la normale principale, qui doit former un trièdre trirectangle positif avec les deux autres droites; le cosinus relatif à Ox est, par exemple,

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\alpha}{ds}\Big[b'(a'b''-b'a'')-c'(c'a''-a'c'')\Big]$$
$$=\frac{1}{\sigma}\frac{d\alpha}{ds}\left(a'\sigma\sigma'-a''\sigma^2\right)=\frac{d\alpha}{ds}\left(a'\sigma'-a''\sigma\right).$$

En appliquant une des formules de Frenet, on a alors

$$\frac{a''}{\sigma}-\frac{a'\sigma'}{\sigma^2}=\frac{a'\sigma'-a''\sigma}{\tau};$$

d'où $\tau=-\sigma^2$. Donc, dans le cas général, on a

$$\tau=-\rho_2^2. \tag{27}$$

Cherchons maintenant *le point central* M_0. La normale en ce point doit être dans le plan asymptote; d'où la condition

$$a\theta_1+b\theta_2+c\theta_3=0,$$

dont on tire

$$\beta_0=\frac{2\rho}{\rho'}-\alpha. \tag{28}$$

En portant cette valeur dans (D), on aura les équations de la ligne de striction.

Calculons le *paramètre de distribution* ϖ. La génératrice étant orientée par les cosinus directeurs (23), la mesure algébrique h du vecteur (M_0M) est

$$h=\rho_1\left(\frac{2}{\alpha+\beta}-\frac{2}{\alpha+\beta_0}\right)=\rho_1\left(\frac{2}{\alpha+\beta}-\frac{\rho'}{\rho}\right). \tag{29}$$

D'autre part, soit V l'angle du plan central avec le plan tangent en M, angle mesuré autour de la génératrice orientée. On a, par définition,

$$\varpi = \frac{h}{\operatorname{tg} V}.$$

Or, pour calculer tang V, il nous suffit d'avoir les cosinus directeurs de la demi-droite qui forme avec la génératrice et la normale au plan asymptote un trièdre trirectangle positif. Comme nous connaissons les cosinus de ces deux dernières droites, nous pouvons en déduire ceux de la première; le cosinus relatif à Ox, par exemple, est

$$\frac{1}{\rho\rho_1}\Big[b(ba'-ab')-c(ac'-ca')\Big]$$
$$=\frac{1}{\rho\rho_1}\Big[a'\rho^2-a\rho\rho'\Big]=\frac{a'\rho-a\rho'}{\rho_1}.$$

On a alors

$$\operatorname{tang} V = \frac{\dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{S}\, a\theta_1}{\dfrac{1}{\rho_1}\,\mathrm{S}\,(a'\rho-a\rho')\theta_1} = \frac{\rho_1\left(\rho^1-\dfrac{2\rho}{\alpha+\beta}\right)}{\rho(\sigma^2-\rho'^2)} = \frac{h}{\rho'^2-\sigma^2}.$$

Par conséquent,

$$(30)\qquad \varpi = \rho'^2-\sigma^2 \quad (^1).$$

La comparaison des équations (24), (26), (27), (29

(1) On peut remarquer que ce paramètre de distribution est essentiellement négatif, tant que a, b, c sont réels. Il en est de même du rayon de torsion τ calculé plus haut. Mais, ceci ne doit pas nous étonner, car nous savons (n° 1) qu'en ne donnant que des valeurs réelles à a, b, c on n'obtient pas toutes les surfaces réelles. Pour les avoir toutes, il faut admettre les valeurs imaginaires pures, ce qui donne alors un paramètre de distribution et un rayon de torsion positifs.

et (30) nous conduit à la suivante

$$\rho_2^2 = -\tau = -\varpi + \frac{\rho^2 h^2}{\rho_1^2} = -\varpi + \frac{h^2}{-\varpi};$$

d'où la formule très élégante

$$(31) \qquad h^2 + \varpi^2 = \tau\varpi,$$

qui peut se traduire par la construction suivante :

Étant donnée une surface réglée, soit M *un de ses points et* M_0 *le point central de la génératrice qui passe par* M. *Élevons en* M_0 *une perpendiculaire* Δ *à* M_0M *et portons-y une longueur* M_0K *égale au paramètre de distribution. Le plan mené par* M *perpendiculairement à* KM *rencontre* Δ *en un point* K′ *tel que* KK′ *est égal au rayon de torsion en* M *de la ligne asymptotique qui passe par* M. *De plus, ce rayon de torsion a même signe que le paramètre de distribution.*

Bien entendu, on peut dire aussi que *la courbure totale en* M *est égale à* $-\dfrac{1}{\overline{KK'}^2}$. En particulier, *la courbure totale au point central est* $-\dfrac{1}{\varpi^2}$.

La formule (28) nous donne immédiatement la solution du problème suivant : *Trouver les surfaces réglées dont la ligne de striction est en même temps ligne asymptotique.* En effet, nous pouvons supposer (n° 3) que cette ligne asymptotique correspond à $\beta = \infty$, ce qui nous donne la condition nécessaire et suffisante $\rho' = 0$. *On aura toutes les solutions du problème en prenant pour a, b, c trois fonctions quelconques vérifiant l'identité*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dans ce cas *le paramètre de distribution est égal, en grandeur et en signe, au rayon de torsion de la ligne de striction.* Il se réduit d'ailleurs à $-\sigma^2$, de sorte qu'il sera constant si l'on prend

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \text{const.}$$

7. *Étude de* (S_1). — Les seules propriétés de cette surface qui semblent intéressantes sont relatives aux lignes (α). *A priori*, celles-ci doivent être planes, le plan de chacune d'elles étant perpendiculaire à la génératrice correspondante de (S). C'est ce qu'il est aisé de vérifier sur les équations (E). Posons, pour abréger, nous avons

$$u = \int (A'a'' - A''a')\, d\alpha, \qquad v = \int (A'b'' - A''b')\, d\alpha,$$
$$w = \int (A'c'' - A''c')\, d\alpha;$$

$$(x_1 - u)(cb' - bc') + (y_1 - v)(ac' - ca') + (z_1 - w)(ba' - ab') = 0. \tag{32}$$

Telle est l'équation du plan de la ligne (α), si l'on regarde x_1, y_1, z_1, comme les coordonnées courantes. Ce plan enveloppe une développable Δ dont le cône directeur est supplémentaire de celui de (S). Elle dépend de la fonction arbitraire A, ce qui incite à penser qu'elle constitue la développable la plus générale admettant le cône directeur précédent. Effectivement, si l'on se donne cette développable, il faut déterminer la fonction A de façon qu'on ait

$$u(cb' - bc') + v(ac' - ca') + w(ba' - ab') = p, \tag{33}$$

p désignant une fonction donnée de α.

Si l'on remarque que

$$u = A'a' - 2A''a + 2\int A'''a\, d\alpha,$$

l'équation précédente s'écrit

$$(cb'-bc')\int A'''a\,d\alpha + (ac'-ca')\int A'''b\,d\alpha$$
$$+(ba'-ab')\int A'''c\,d\alpha = \frac{p}{2}.$$

Si on la dérive trois fois de suite, en remplaçant, au fur et à mesure qu'elles apparaissent, les dérivées troisièmes de a, b, c par leurs valeurs tirées de (18), on obtient, tous calculs faits,

$$2A'''\delta = -\lambda(\lambda p' + \mu p + p'') + \nu p - \lambda p'' - \lambda' p' - \mu p' - \mu' p - p'''.$$

Donc, *se donner la développable* Δ *équivaut à se donner* A''' *et même* A, puisqu'on peut, sans changer (S_1), ajouter à cette fonction un trinome du second degré quelconque en α, quitte à modifier B (n° 4).

En particulier, *si la développable* Δ *est un cône de sommet* O, on a $p = 0$; *on peut donc prendre* $A = 0$. Alors u, v, w sont des constantes nécessairement toutes nulles, car, si elles ne l'étaient pas, l'équation (33) exprimerait que (S) admet un plan directeur.

On voit quel est le rôle de la fonction arbitraire A. Celui de B est, au contraire, de fixer la nature des lignes planes (α). Mais, on ne peut indiquer, d'une manière géométrique simple, quel est le degré de généralité qui subsiste dans le choix de ces lignes quand on s'est donné la développable enveloppe de leurs plans, c'est-à-dire la fonction A. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est qu'il est permis de choisir arbitrairement l'une d'elles; la fonction B est alors déterminée par une équation différentielle du premier ordre, de sorte qu'il semble exister encore une constante arbitraire dans la solution. Sans vouloir approfondir cette question, qui ne présente d'ailleurs pas un bien grand intérêt, nous ferons seulement l'observation suivante : *Si une ligne* (α) *particulière est une droite, les autres sont aussi des droites et la surface* (S_1) *est développable.*

En effet, si l'on écrit que x_1, y_1, z_1 satisfont aux équations des projections de la droite sur les plans de coordonnées, on obtient des relations de la forme

$$(34) \quad m_1\left(B' - \frac{2B}{\alpha+\beta}\right) + m_2\frac{B'}{\alpha+\beta} + \frac{m_3}{\alpha+\beta} + m_4 = 0,$$

où les m_i sont des constantes, les deux premières n'étant pas nulles pour l'une au moins des projections. Cette équation linéaire s'intègre aisément et donne pour B un trinome du second degré en β, lequel peut être réduit à zéro, quitte à changer A (n° 4). Or, *si l'on fait* $B = 0$ dans les équations (E), on reconnaît sans peine qu'on obtient une surface développable dont l'arête de rebroussement a pour équations

$$x = u + \frac{A'}{A}(aA' - a'A), \qquad y = v + \frac{A'}{A}(bA' - b'A),$$
$$z = w + \frac{A'}{A}(cA' - c'A).$$

On pourrait déduire de là une solution du problème de la déformation infiniment petite des surfaces développables, pour lesquelles la méthode des formules de M. Lelieuvre est en défaut. Mais, nous ne pouvons le faire ici, d'autant plus qu'on peut résoudre directement la question en partant de la déformation finie.

(*A suivre.*)