

G. STOYANOV

**Sur un déterminant circulaire**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1912), p. 358-364

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1912\\_4\\_12\\_\\_358\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__358_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[B1c]

SUR UN DETERMINANT CIRCULAIRE;

PAR M. G. STOYANOV.

---

Catalan a étudié <sup>(1)</sup> un déterminant circulaire de degré  $n$ , composé de deux éléments,  $-1$  et  $1$ , le premier pris  $p$  fois. Comme valeur de ce déterminant, il trouve l'expression

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} 2^{n-1}(n-2p) \quad (2),$$

---

<sup>(1)</sup> *Recherches sur les déterminants (Bulletin de l'Académie de Belgique, t. XIII. 1<sup>re</sup> Partie, 1846, p. 534-555).*

<sup>(2)</sup> Cette formule est imprimée avec une erreur dans *Die Deter-*

sous la condition  $p < \frac{n}{2}$ . Nous verrons que cette condition supposée par l'auteur comme nécessaire ne l'est pas, et qu'une autre condition essentielle, sans laquelle la résolution du problème n'est pas complète, a échappé à Catalan.

Nous nous proposons de généraliser le déterminant en question, en considérant le déterminant circulaire suivant :

$$\Delta_p^m = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{p.} \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{m.} \\ \left| \begin{array}{cccccccccccc} a & a & a & \dots & a & a & b & b & \dots & \dots & b & b & b \\ a & a & a & \dots & a & b & b & b & \dots & \dots & b & b & a \\ a & a & a & \dots & b & b & b & b & \dots & \dots & b & a & a \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a & a & b & \dots & b & b & b & b & \dots & \dots & a & a & a \\ a & b & b & \dots & b & b & b & b & \dots & \dots & a & a & a \\ b & b & b & \dots & b & b & b & a & \dots & \dots & a & a & a \\ b & b & b & \dots & b & b & a & a & \dots & \dots & a & a & b \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a & a & a & a & \dots & \dots & b & b & b \\ b & b & a & \dots & a & a & a & a & \dots & \dots & b & b & b \\ b & a & a & \dots & a & a & a & b & \dots & \dots & b & b & b \end{array} \right| \end{array},$$

où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels ou imaginaires, et  $p + m = n$ .

Nous trouverons la valeur de  $\Delta_p^m$  de deux manières :

1. *Par les propriétés générales des déter-*

*minanten von E. Pascal.* Il y a  $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-3)} 2^{n-1}(n-2p)$  au lieu de  $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} 2^{n-1}(n-2p)$ .



l'évaluation du déterminant  $\Delta_p^m$ ; c'est pourquoi nous le nommerons *le déterminant caractéristique de  $\Delta_p^m$* .

La structure du déterminant caractéristique  $D_p^m$  est bien évidente; nous remarquerons cependant que c'est uniquement la  $p^{\text{ième}}$  ligne horizontale, qui ne contient pas l'élément  $-1$ ; ensuite, c'est dans la  $(p+1)^{\text{ère}}$  ligne que cet élément réapparaît et cette fois-ci sous la diagonale principale.

On trouve la valeur de  $D_p^m$  par réduction de son degré. Nous supposerons d'abord que les nombres  $p$  et  $m$  ne sont pas égaux entre eux.

1°  $p < m$ . Nous ajoutons la première ligne horizontale à la  $(p+1)^{\text{ère}}$ , la seconde à la  $(p+2)^{\text{ième}}$  et ainsi de suite  $p$  fois. Par ce procédé, les  $p$  premières colonnes de  $D_p^m$  ne contiennent qu'une fois l'élément  $1$ , tandis que tous les autres éléments sont  $0$ ; l'élément  $1$  se trouve dans la diagonale principale. Il s'ensuit que le déterminant est réduit au degré  $m-1$ ; par sa construction, ce déterminant n'est autre chose que le déterminant caractéristique du déterminant circulaire  $\Delta_p^{m-p}$ .

2°  $p > m$ . En suivant le même procédé que plus haut, mais avec les  $m-1$  premières et  $m-1$  dernières lignes horizontales, nous obtenons le déterminant caractéristique du déterminant circulaire  $\Delta_{p-m}^m$ .

On voit que, dans les deux cas, le degré du déterminant se réduit du plus petit des deux nombres  $p$  et  $m$ .

Si les nombres  $p$  et  $m$  sont premiers entre eux, une première réduction du degré du déterminant  $D_p^m$  par  $p$  ou  $m$  donne un déterminant de la même forme, où  $p \leq m-p$  ou bien  $p-m \geq m$ . Nous continuons la même réduction avec le déterminant obtenu, et, comme  $p$  et  $m$  sont des nombres entiers qui n'ont aucun

diviseur commun, nous arrivons au cas où l'un des nombres  $p$  ou  $m$  est 1. Mais ici nous avons le déterminant  $D_k^1$  ou  $D_1^k$ , dont la valeur est 1.

Si, au contraire,  $p$  et  $m$  ont un diviseur commun, par la réduction successive de degré du déterminant proposé, nous arrivons au cas où le déterminant ne contient qu'une seule des lettres  $a$  ou  $b$ , et dont la valeur est nulle. Par conséquent, si  $p$  et  $m$  ont un diviseur commun différent de 1, la valeur du déterminant  $\Delta_p^m$  est nulle.

De ce que nous venons d'exposer il résulte que la valeur du déterminant en question est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}(a-b)^{n-1}(pa+mb) \quad \text{ou} \quad \text{zéro,}$$

suivant que  $p$  et  $m$  sont des nombres premiers entre eux ou non.

2. *Par les propriétés des déterminants circulaires.* — Profitons maintenant de la formule exprimant la valeur du déterminant circulaire, formé de  $n$  éléments différents  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Comme on sait <sup>(1)</sup>, cette formule est

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_n),$$

où

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1}$$

et les  $x$  sont les racines de l'équation binôme  $x^n - 1 = 0$ .

Dans notre cas

$$a_1 = a_2 = \dots = a_p = a, \quad a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = a_n = b,$$

---

<sup>(1)</sup> STERN, *Einige Bemerkungen über eine Determinante* (Journ. f. Math., Bd. 73, 1871, p. 374-380). — E. PASCAL, *Die Determinanten*, 1900, p. 73).

de sorte que

$$\varphi(\alpha) = a(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{p-1}) \\ + b\alpha^p(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1}).$$

Il en résulte

$$\Delta_p^m = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \prod_{i=1}^{i=n} [ a(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{p-1}) \\ + b\alpha_i^p(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{m-1}) ] \\ = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} (pa + mb) \prod_{i=1}^{i=n-1} [ a(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{p-1}) \\ + b\alpha_i^p(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{m-1}) ].$$

Et, comme

$$1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{p-1} = -\alpha_i^p(1 + \alpha_i + \dots + \alpha_i^{m-1}),$$

nous recevons

$$\Delta_p^m = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} (pa + mb) \\ \times (a - b)^{n-1} \prod_{i=1}^{i=n-1} (1 + \alpha_i + \alpha_i^2 + \dots + \alpha_i^{p-1}).$$

Des facteurs sous le signe  $\Pi$ , nous concluons que si les nombres  $p$  et  $m$ , et par équivalence si  $p$  et  $n$  ont un diviseur commun, le produit devient nul. Donc  $\Delta_p^m = 0$ .

Au contraire, si les nombres  $p$  et  $m$  n'ont pas de diviseur commun, le déterminant a la valeur

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} (pa + mb)(a - b)^{n-1}.$$

En effet, si nous faisons les multiplications sous le signe  $\Pi$ , ayant en vue les propriétés des fonctions symétriques des racines de l'équation binome  $x^n - 1 = 0$ ,

nous trouvons

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} (1 + \alpha_i + \alpha_i^2 + \dots + \alpha_i^{p-1}) = 1.$$

*Cas particuliers.* — Pour  $a = 1$ ,  $b = 0$ , la valeur du déterminant  $\Delta_p^m$  est

$$0, \quad -p, \quad p,$$

suivant que  $p$  et  $m$  ont respectivement un diviseur commun ou bien que  $p + m = n$  est un nombre de la forme  $4k - 1$  ou  $4k$ , ou bien encore qu'il a la forme  $4k + 1$  ou  $4k + 2$ .

Pour  $a = -1$ ,  $b > 1$ , nous avons le déterminant de Catalan. Nous arrivons donc au résultat que la condition  $p < \frac{n}{2}$ , posée par Catalan, loin d'être nécessaire, est tout à fait inutile. Au contraire, il est indispensable de considérer si les nombres  $p$  et  $n$ , ou ce qui est la même chose,  $p$  et  $m$  ont ou n'ont pas de diviseur commun, car, dans le premier cas, le déterminant de Catalan a la valeur nulle, ce que l'auteur n'a pas prévu.

Pour  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $p = 1$ , nous avons le déterminant circulaire, étudié par Catalan et M. Fouret (1).