NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. D'ADHÉMAR

Principe de Dirichlet. La formule de Poisson

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 375-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__375_0>

[D5c]

PRINCIPE DE DIRICHLET. LA FORMULE DE POISSON;

Par M. R. d'ADHÉMAR.

Lorsque se produit une puissante synthèse, comme celle de MM. Fredholm, Hilbert, etc., pour les problèmes de la Physique mathématique (à caractéristiques imaginaires), il est intéressant de *retrouver*, par la méthode nouvelle, les solutions anciennes relatives aux cas les plus simples.

Nous allons voir que, par la théorie des potentiels, et sans faire usage des transcendantes de M. Fredholm, on retrouve facilement la formule de Poisson.

Il s'agit, on le sait, de trouver la solution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

la fonction u étant donnée sur une *circonférence*. C'est le problème de Dirichlet.

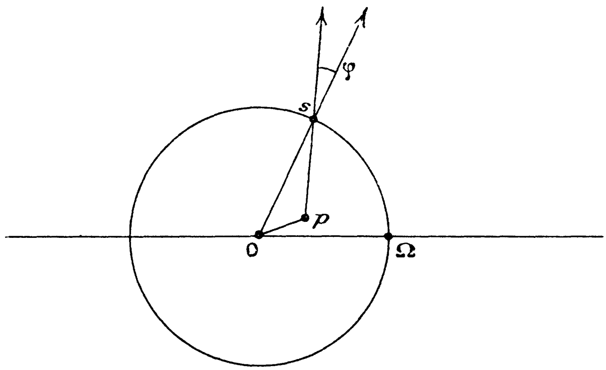
Nous rappelons [1] que l'on résout le problème de Dirichlet *intérieur*, dans le plan, par un potentiel *de double couche*. Soit W_p ce potentiel, au point p; on aura

$$W_p = \int_0^L \nu_s \frac{\cos\varphi}{r_p}\, ds, \tag{1}$$

L étant la longueur du contour donné; r_p la distance

[1] *Leçons sur les Principes de l'Analyse*, par l'auteur (Gauthier-Villars), t. I, Chap. VIII et Chap. IX. *Voir* aussi : O. D. Kellogg, *Theorie der Integralgleichungen und der Dirichlet'schen Princips*, Göttingen, 1902.

du point p au point s sur le contour; φ étant l'angle de la droite r_p avec la normale au contour au point s; ν étant la densité; ds étant l'élément d'arc du contour.



La densité ν_s est donnée par l'équation de Fredholm

$$(2)\qquad \nu_s + \frac{1}{\pi}\int_0^{L} \frac{\cos\varphi}{r}\,\nu_\sigma\, d\sigma = \frac{W_i}{\pi} = \psi_s,$$

W_i est la fonction donnée sur la frontière et r est la distance du *point fixe* Ω, sur le contour, au *point mobile* s, sur ce même contour.

Si le contour est un cercle de rayon R, on a

$$\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{R}{2} = \text{const.}$$

Dans ce cas, on a *immédiatement* $\nu_s = \psi_s + A$. A est une constante, que nous déterminons par identification, ce qui donne

$$(3)\qquad A + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi R} (\psi_\sigma + A)\, d\sigma = 0;$$

A est donc connu, donc ν_s est connu, et nous avons à calculer W_p, par la formule (1).

Le triangle Ops donne, en posant $\overline{Op} = l$, longueur donnée, puisque le point p est donné

$$l^2 = R^2 + r_p^2 - 2Rr_p \cos\varphi,$$
$$\frac{\cos\varphi}{r_p} = \frac{1}{2R}\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2}\right).$$

On aura donc

$$(4) \qquad W_p = \int_0^{2\pi R} (\psi_s + A)\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2}\right)\frac{ds}{2R}.$$

Tenons compte de la relation (3); d'où

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi R} (\psi_s + A)\frac{ds}{2R} = -\frac{\pi A}{R^2}.$$

Maintenant, pour une densité *constante* et égale à A, nous aurions un potentiel double *constant*, dans le domaine intérieur [1], ce qui donne

$$W'_p = \int A\, d\omega = 2\pi A.$$

Appliquant la formule (4), cela donnera

$$(6) \qquad 2\pi A = \int_0^{2\pi R} A\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r_p^2}\right)\frac{ds}{2R},$$

quel que soit le point *intérieur* p.

De là résulte, en posant $W_i = F_s$, fonction donnée [2] :

$$W_p = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \frac{R^2 - l^2}{r_p^2} F_s\, ds.$$

---

[1] *Leçons sur les Principes de l'Analyse*, par l'auteur, t. I, p. 218 (ω est l'angle solide).

[2] Il suffit d'écrire :

$$(\psi_s + A)\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r^2}\right) \equiv (\psi_s + A) + \psi_s \frac{R^2 - l^2}{r^2} + A\left(1 + \frac{R^2 - l^2}{r^2}\right) - A$$

et d'utiliser les formules (5) et (6).

C'est *la formule de Poisson*. On pourra poser

$$ds = \mathrm{R}\, d\theta,$$

θ étant l'arc de cercle, et

$$r_p^2 = \mathrm{R}^2 + l^2 - 2\mathrm{R}\, l \cos(\theta - \alpha),$$

l et α étant les coordonnées polaires du point p.