NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉLIE PARROD

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 37-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__37_1>

[N'16a]

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ÉLIE PARROD.

Dans cette Note, j'ai pour but d'établir le théorème suivant et d'en déduire quelques conséquences :

THÉORÈME. — *Si deux quadrilatères* ABCD, A'B'C'D', *inscrits dans une même conique sont homologiques, les six points* (AB. C'D'), (AC. D'B'), (AD. B'C'), (A'B'. CD), (A'C'. DB), (A'D'. BC) *sont sur une droite* Δ, *passant par le centre d'homologie* P *et tangente en ce point* P *aux deux coniques* ABCDP, A'B'C'D'P'.

Ce théorème peut être considéré comme une généralisation du théorème d'Aubert. Il se déduit facilement du théorème bien connu suivant :

THÉORÈME. — *Considérons une conique variable passant par quatre points fixes* A, B, C, D *et rencontrant en* M, N, *deux droites fixes* AP, BP *issues de* A *et* B; *la droite* MN *passe par le point d'intersection de la droite* CD *et de la tangente en* P *à la conique* ABCDP.

En effet, les points M, N décrivent sur AP et BP deux divisions homographiques qui ont le point P commun; la droite MN passe par un point fixe O situé sur la tangente en P à la conique du faisceau qui passe par P; une conique particulière se compose des deux droites AB, CD, donc ce point fixe O est sur la droite CD.

Ceci étant : dans le théorème précédent, la conique considérée passe par les quatre points A, B, C, D, et les deux droites CP, DP rencontrent la conique en C′, D′; la tangente en P à la conique ABCDP passe par l'intersection O des droites AB, C′D′; la conique A′B′C′D′P montre que le point O est sur la tangente en P. Donc ces deux coniques sont tangentes en P et la tangente en P est PO.

Les autres combinaisons montrent que les cinq autres points sont sur cette droite Δ.

Applications.

I. Soient Γ, Γ′ deux coniques se coupant en quatre points A, B, C, D. Prenons le centre d'homologie P sur la conique Γ, on obtient le quadrilatère homologique A′B′C′D′ inscrit dans la conique Γ′; à cette figure, il correspond une droite Δ tangente en P à Γ.

Exemple. — Les normales PA, PB, PC, PD menées d'un point P à une conique la rencontrent en A′, B′, C′, D′, la droite Δ correspondante est tangente en P à l'hyperbole d'Apollonius.

Avec les symétriques des points A, B, C, D par rapport au centre O′ on aurait une droite Δ tangente en ce point à cette hyperbole; la conique A′B′C′D′O′ est tangente en O′ à l'hyperbole d'Apollonius.

II. Le point P peut être supposé à l'infini.

Exemple. — Si dans un cercle on mène quatre cordes parallèles AA', BB', CC', DD', on obtiendra une droite Δ parallèle aux cordes, qui sera une asymptote de deux hyperboles, l'une passant par A, B, C, D et l'autre par A', B', C', D'.

III. La conique peut être remplacée par un système de deux droites.

Exemple. — Un cercle est rencontré par deux sécantes en A, B, C, D ; prenons, sur le cercle, le centre d'homologie P ; il correspond quatre points A', B', C', D' sur les deux sécantes, ce qui donne quatre points situés sur la tangente en P au cercle.

IV. Le quadrilatère ABCD peut être remplacé par un triangle et une tangente en un sommet ou par une corde et les tangentes aux extrémités.

Exemple. — Soient une conique, un axe AB, le cercle ayant pour diamètre cet axe et les tangentes aux sommets correspondants A, B. Prenons le point P sur la conique, les droites PA, PB rencontrent le cercle en A', B' ; la tangente en A' au cercle rencontre la tangente en B au point B_1 et la tangente en B' au cercle rencontre la tangente en A au point A_1 ; la droite A_1B_1 est tangente en P à la conique.

V. Supposons, pour terminer, que trois points A, B, C soient confondus et considérons la conique osculatrice en ce point ; elle rencontre la conique donnée en D et passe par un point P situé sur la tangente en D à cette conique donnée qui est rencontrée en A' par PA.

DA' rencontre la tangente en A au point E, la tangente en A' rencontre AD en F ; la droite EF est tangente en P.

Je me bornerai à ces quelques applications et je laisserai au lecteur le soin de transformer la propriété par polaires réciproques.