Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Courbes gauches. Sur les formules de Cayley analogues aux formules de Plücker

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 403-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__403_1>

[M^{3}1a]

COURBES GAUCHES. SUR LES FORMULES DE CAYLEY ANALOGUES AUX FORMULES DE PLÜCKER;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Soient D le genre d'une courbe plane, m son ordre et n sa classe ; on peut exprimer en fonction de ces trois nombres les nombres de Plücker (*Revue de Mathématiques spéciales*, août 1898), et l'on a en particulier

$$n + \varkappa = 2(m + \mathrm{D} - 1),$$
$$m + \iota = 2(n + \mathrm{D} - 1).$$

On peut de même introduire le genre dans les formules de Cayley pour les courbes gauches.

Soit r le rang d'une courbe gauche, c'est-à-dire le nombre de tangentes qui rencontrent une droite donnée (nombre de plans tangents à la courbe qui passent par la droite); soit m l'ordre de la courbe; soit n sa classe, c'est-à-dire le nombre de plans osculateurs passant par un point donné [1]. *Les singularités essentielles* de la courbe, celles qui existent généralement sur la courbe ou sur sa polaire réciproque, comprennent les singularités tangentielles qui existent lorsqu'on part d'une équation ponctuelle générale, à savoir des plans surosculateurs (ou stationnaires) en nombre α, et les singularités ponctuelles corrélatives de celles-là, à savoir des points cuspidaux (ou stationnaires) en nombre β. On a les formules

$$n + m = 2(r + D - 1), \tag{1}$$

$$r + \alpha = 2(n + D - 1), \tag{2}$$

$$r + \beta = 2(m + D - 1). \tag{3}$$

On obtient les formules (1) et (2) en considérant l'enveloppe des traces des plans osculateurs sur un plan quelconque, et en appliquant les formules rappelées ci-dessus; D désigne le genre de la courbe plane. Si l'on considère le cône dont le sommet est un point quelconque et qui s'appuie sur la courbe, la seconde des formules rappelées ci-dessus donne la formule (1), D désignant alors le genre du cône qui est par suite égal à celui de la courbe plane, et la première de ces formules donne la formule (3). *On dit que* D *est le genre de la courbe gauche.*

Si l'on prend comme données D, α, β, on aura m, n, r

---

[1] Lorsque la courbe est créée par des plans osculateurs, on préfère ordinairement parler de la développable formée par les tangentes; cette façon de faire a l'inconvénient de masquer la corrélation qui existe entre les points de la courbe et ses plans osculateurs (Cf. *Nouvelles Annales*, 1907, p. 436).

par les formules

$$(F)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha+3\beta &= 4m+12(D-1),\\ \beta+3\alpha &= 4n+12(D-1),\\ \alpha+\beta &= 2r+8(D-1); \end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(F)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha+3\beta &= 4(m-3)+12D,\\ \beta+3\alpha &= 4(n-3)+12D,\\ \alpha+\beta &= 2(r-4)+8D: \end{aligned}\right.$$

ces formules montrent que, à l'exception de la cubique gauche, toute courbe gauche algébrique, *si elle n'a pas d'autres singularités que celles considérées ici*, possède des plans surosculateurs ou des points cuspidaux. On verra au n° **2** qu'il n'en est plus nécessairement ainsi lorsque la courbe a des tangentes d'inflexion.

Dans le cas d'une courbe unicursale, $D=0$, les formules deviennent

$$\left.\begin{aligned} &(1') & m+n &= 2(r-1),\\ &(2') & r+\alpha &= 2(n-1),\\ &(3') & r+\beta &= 2(m-1);\\ &(F') & &\left\{\begin{aligned} \alpha+3\beta &= 4(m-3),\\ \beta+3\alpha &= 4(n-3),\\ \alpha+\beta &= 2(r-4). \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\}\ (D=0.)$$

il est facile d'avoir directement les formules (2') et (3'); la première, par exemple, en représentant les plans osculateurs par une équation de la forme

$$at^n+bt^{n-1}+\ldots=0,$$

où a, b, ... sont des fonctions linéaires des coordonnées (Salmon, t. II, p. 82, avec $\alpha=0$).

Pour $D = 1$, on a

$$
\left.
\begin{array}{ll}
(1'') & m + n = 2r, \\
(2'') & r + \alpha = 2n, \\
(3'') & r + \beta = 2m; \\
(F'') & \left\{
\begin{array}{l}
\alpha + 3\beta = 4m, \\
\beta + 3\alpha = 4n, \\
\alpha + \beta = 2r.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right\} \quad (D = 1.)
$$

2. Sous une condition unique, la courbe peut avoir une tangente d'inflexion, singularité qui est sa propre corrélative. Le nombre de ces tangentes étant φ, il faut remplacer m par $m + \varphi$ dans la formule (1) si on l'obtient par la première méthode, ou n par $n + \varphi \ldots$; on a ainsi

$$
(1) \qquad m + n + \varphi = 2(r + D - 1),
$$

et les premiers membres des formules (F) deviennent

$$
\alpha + 3\beta + 2\varphi, \qquad \beta + 3\alpha + 2\varphi, \qquad \alpha + \beta + 2\varphi.
$$

Pour la quartique de Salmon, on a

$$
D = 0, \qquad m = 4, \qquad r = 6;
$$

les formules (1), (2) et (3) donnent

$$
n = 6 - \varphi, \qquad \alpha = 4 - 2\varphi, \qquad \beta = 0;
$$

or on peut avoir $\varphi = 0$, $\varphi = 1$, $\varphi = 2$, comme l'a remarqué Cayley; par $\varphi = 2$, on a donc

$$
D = 0, \qquad r = 6, \qquad m = 4, \qquad n = 4, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0,
$$

de sorte que la courbe n'a alors ni plans surosculateurs, ni point cuspidaux.

3. *Une courbe gauche de genre* 0 *ou* 1, *qui a*

seulement des singularités essentielles, dépend de paramètres en nombre $4m - 2\beta$, *ou* $4n - 2\alpha$, *ou encore*

$$2r - 4(D - 1).$$

a. Dans la représentation par points d'une courbe unicursale qui est générale de son ordre, le nombre des paramètres est

$$4(m+1) - 1 - 3 \quad \text{ou} \quad 4m,$$

en tenant compte de la substitution possible $t = \dfrac{at+b}{ct'+d}$, qui supprime trois paramètres apparents. Si la courbe a des points cuspidaux en nombre β, le nombre des paramètres est $4m - 2\beta$, ou $2r + 4$. C'est ainsi que la question de Salmon dépend de 16 paramètres; la biquadratique nodale dépend seulement de 15 paramètres, à cause du point double.

b. Les coordonnées d'un point d'une courbe de genre 1 sont les valeurs que prennent, pour une même valeur de l'argument, trois fonctions elliptiques aux mêmes périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, ayant les mêmes pôles en nombres m. (*Voir* Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 449.) On peut écrire

$$\frac{x}{A\sigma(u - a_1)\ldots} = \frac{y}{B\sigma(u - b_1)\ldots} = \ldots = \frac{1}{\sigma(u - d_1)\ldots},$$

avec

$$\Sigma a_1 = \Sigma b_1 = \Sigma c_1 = \Sigma d_1.$$

Les deux paramètres ω_1 et ω_2 sont purement fictifs; la possibilité de remplacer u par $mu + n$ permet en effet de donner à ω_1 et ω_2 des valeurs déterminées.

Le nombre des paramètres est donc $4m$ pour une courbe d'ordre 1 qui est générale de son ordre, et $4m - 2\beta$ ou $2r$ lorsque la courbe a des points cuspidaux.

Si la courbe a φ tangentes d'inflexion, le nombre des paramètres est

$$2r - \varphi - 4(D - 1),$$

ou encore

$$m + n - 6(D - 1).$$