HENRI DUBOIS

Sur l'intégration des différentielles totales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 421-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__421_1>

[C2b]

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES;

PAR M. HENRI DUBOIS.

Soit à trouver une fonction $F(x, y)$ telle que l'on ait

$$dF = P\,dx + Q\,dy,$$

P et Q étant deux fonctions données des deux variables x et y seulement.

Le problème ne diffère pas de celui-ci :

Trouver F (x, y) telle que

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

Je rappelle d'abord que :

(α). Deux fonctions qui ont même dérivée partielle par rapport à une même variable ne sauraient différer que d'une fonction ne dépendant pas de cette variable.

En particulier, deux fonctions répondant à la question ne diffèrent nécessairement que d'une constante.

Pour que les conditions (1) soient remplies il faut d'abord que

$$(2) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Je dis que cette condition est suffisante d'une part pour que F existe et, d'autre part, pour que sa recherche se ramène à celle de deux quadratures.

En effet, supposons-la satisfaite. Soit F_1 une fonction telle que

$$(3) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} = P.$$

Une telle fonction s'obtiendra en prenant une primitive quelconque de la fonction P où y sera regardé comme une constante. Si F existe, d'après la propriété (α),

$$F = F_1 + \varphi(y).$$

Je dis qu'il est possible de déterminer $\varphi(y)$ de façon que les deux conditions (1) soient remplies.

Comme la première l'est, il suffit d'avoir

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q. \tag{4}$$

Or la dérivation par rapport à y de (3) donne, eu égard à (2),

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}Q.$$

Alors, toujours d'après la propriété (α),

$$Q - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \psi(y)$$

et la condition (4), qui reste à satisfaire, s'écrit

$$\frac{d\varphi}{dy} = \psi(y),$$
$$\varphi = \int \psi(y)\,dy.$$

La démonstration s'étend aisément au cas d'un nombre quelconque de variables.

Remarque. — Cette démonstration jouit, me semble-t-il, de deux avantages :

1° Elle n'introduit dans la recherche de F que des intégrales indéfinies, tandis que la méthode classique exige que l'on place, avec soin, les limites de chaque intégration, et sur le signe $\int$, et dans les fonctions à intégrer ;

2° Elle n'utilise nullement la dérivation sous le signe $\int$ et, à cause de cela, pourrait entrer aisément dans le programme de Mathématiques spéciales où elle mettrait de l'unité dans les méthodes d'intégration des équations différentielles du premier ordre.