Nouvelles annales de mathématiques

Ét. Delassus

Le cas régulier d'intégration par quadratures des équations de Lagrange d'un système holonome

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 450-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__450_0>

[R6bα]

LE CAS RÉGULIER D'INTÉGRATION PAR QUADRATURES DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE D'UN SYSTÈME HOLONOME;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

Pour ne pas interrompre les raisonnements, nous commencerons par établir une propriété relative aux formes quadratiques.

Soit Φ une forme quadratique homogène ou non de variables que nous séparerons en deux groupes u_1, u_2, ...; v_1, v_2, ..., forme dont les coefficients peuvent contenir d'autres variables λ_1, λ_2, ...

Considérons les équations linéaires

$$(1) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v_2} = \beta_2, \qquad \ldots,$$

où les β sont des constantes et qui permettent d'exprimer les v comme fonctions linéaires des u, les coefficients étant des fonctions des λ.

Enfin, soit Ψ la forme quadratique des u à coefficients fonctions des λ qu'on obtient en remplaçant les v, par leurs valeurs tirées du système (1), dans la fonction

$$\Phi - \sum \frac{\partial\Phi}{\partial v} v,$$

ou, ce qui revient au même, dans la fonction

$$\Phi - \sum \beta v,$$

de sorte qu'on a, en vertu des formules (1),

$$(2) \qquad \Psi \equiv \Phi - \sum \beta v.$$

La fonction Ψ contient les u directement et par l'intermédiaire des v, et il en est de même relativement aux λ. Par dérivation on aura donc

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{dv}{du_i} - \sum \beta \frac{\partial v}{\partial u_i}$$
$$\equiv \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \beta \right) \frac{dv}{di} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial u_i},$$

puisque les $\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \beta$ sont nuls en vertu des équations (1). Le même calcul s'applique aux variables λ; donc :

Les dérivées partielles de Ψ par rapport aux variables u et λ sont les transformées des mêmes dérivées partielles de Φ.

De ce qui précède résulte immédiatement qu'on a

$$\sum u \frac{\partial \Psi}{\partial u} \equiv \sum u \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

ce qu'on peut écrire

$$\sum u \frac{\partial \Psi}{\partial u} \equiv \left[\sum u \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sum v \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] - \sum v \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Appliquons alors le théorème d'Euler en décomposant Ψ et Φ en groupes homogènes. L'égalité précédente deviendra

$$2\Psi_2 + \Psi_1 \equiv 2\Phi_2 + \Phi_1 - \sum v \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

et, en en retranchant l'identité (2) de définition de Ψ,

$$\Psi_2 - \Psi_0 \equiv \Phi_2 - \Phi_0 - \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \beta \right) v,$$

ou plus simplement, en vertu de la transformation,

$$\Psi_2 - \Psi_0 \equiv \Phi_2 - \Phi_0.$$

Donc :

La fonction $\Psi_2 - \Psi_0$ est la transformée de la fonction $\Phi_2 - \Phi_0$.

De sorte que :

La forme quadratique $\Phi_2 - \Phi_0$ aux variables u, v et qui ne contient pas de termes du premier degré se transforme en une forme quadratique aux variables u qui ne contient pas de termes du premier degré.

2. Supposons qu'un problème de mouvement de système holonome, étant mis en équation au moyen de paramètres convenablement choisis, possède des fonctions génératrices parmi lesquelles il y en a une G satisfaisant à la condition suivante :

Les paramètres se répartissent en deux groupes $(a_1, a_2, \ldots)$, $(b_1, b_2, \ldots)$; les paramètres secondaires b ne figurant dans G que par leurs dérivées b', tandis que les paramètres principaux a y figurent eux-mêmes.

Les équations de Lagrange, qui correspondent aux paramètres b, donnent les intégrales immédiates

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial G}{\partial b'_2} = \beta_2, \qquad \ldots, \tag{3}$$

qui permettent d'exprimer les b' en fonction linéaire des a' à coefficients fonctions des a et l'on en déduira les b'' en fonction des a, des a' et des a''. En portant ces valeurs des b' et des b'' dans le groupe des équations de Lagrange relatives aux paramètres a on obtiendra des équations du second ordre déterminant ces paramètres.

Pour effectuer ce calcul, il faut transformer au moyen des formules (3) les expressions $\frac{\partial G}{\partial a'_i}$ et $\frac{\partial G}{\partial a_i}$. Pour cela, appliquons les propriétés du paragraphe précédent; nous devons considérer la fonction

$$\Gamma = G - \sum \beta b'$$

et y faire la transformation, Γ deviendra une fonction des a et des a', quadratique par rapport aux a' et ses dérivées par rapport aux a' et aux a seront les transformées des mêmes dérivées de G, de sorte que les équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial a'}\right) - \frac{\partial G}{\partial a} = 0$$

se transformeront en

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial a'}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial a} = 0.$$

Donc :

Le système de Lagrange réduit aux inconnues principales est encore un système de Lagrange et sa fonction génératrice est la transformée de

$$G - \sum b' \frac{\partial G}{\partial b'}.$$

Pour compléter la démonstration, il faut montrer que Γ possède la propriété essentielle de la force vive.

On voit immédiatement que Γ_2 se déduit de G_2 en y substituant les valeurs des b' réduites à leurs parties homogènes par rapport aux a', c'est-à-dire données par

$$\frac{\partial G_2}{\partial b'_1} = 0, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial b'_2} = 0, \qquad \dots.$$

Une telle substitution dans une fonction essentiellement positive donne évidemment une fonction essentiellement positive, de sorte que Γ possède bien toutes les propriétés caractéristiques d'une fonction génératrice.

3. Supposons, en plus, que la fonction G considérée soit indépendante du temps; cette variable t ne figure pas dans les calculs précédents, donc Γ est aussi indépendante du temps, de sorte que *le système total et le système restreint aux paramètres principaux possèdent simultanément l'intégrale des forces vives.* Mais nous avons vu que

$$\Gamma_2 - \Gamma_0$$

était la transformée de

$$G_2 - G_0.$$

Donc :

L'intégrale des forces vives du problème restreint est la transformée de l'intégrale des forces vives du problème total.

4. Nous conviendrons de dire qu'on est dans *le cas regulier d'intégration par quadratures* si l'on a *une fonction génératrice* G *indépendante du temps et dans laquelle il y a un seul paramètre principal.*

Soient a ce paramètre, b_1, b_2, ... tous les autres qui sont secondaires. Puisqu'on a autant d'intégrales que de paramètres, il est inutile d'écrire les équations de Lagrange; le problème se met immédiatement en équations en écrivant les intégrales premières

$$G_2 - G_0 = h,$$

$$\frac{\partial G}{\partial b'_2} = \beta_1, \qquad \frac{\partial G}{\partial b'_2} = \beta_2, \qquad \ldots.$$

Les dernières permettent d'exprimer les b' en fonction linéaire de a' à coefficients fonctions de a; portant ces expressions dans l'intégrale des forces vives on obtient une équation du second degré en a' dont les coefficients sont fonctions de a et indépendants de t, puisque cette dernière variable, ne figurant pas dans G, ne s'introduit à aucun moment dans les calculs.

Soit

$$A a'^2 + 2 B a' + C = 0,$$

cette équation en a', telle qu'elle est obtenue en faisant le calcul brutal, sans la multiplier ni la diviser par un facteur quelconque.

Quand on rencontre un problème de cette nature, on constate chaque fois que le coefficient B est nul et le coefficient A essentiellement positif. En réalité il y a là une propriété générale qui résulte facilement de ce que nous avons démontré antérieurement.

Reportons-nous aux équations de Lagrange. Le problème total admet l'intégrale des forces vives

$$G_2 - G_0 = h,$$

donc le problème restreint à l'unique paramètre principal a admet également l'intégrale des forces vives

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = k,$$

laquelle est la transformée de la précédente. Donc, si dans l'intégrale des forces vives du problème proposé on remplace les b' par leurs valeurs tirées des intégrales immédiates on obtient un résultat qui est encore une intégrale des forces vives formée avec une fonction possédant la propriété essentielle de la force vive. Cette fonction étant indépendante de t et relative au seul paramètre est de la forme

$$f(a) a'^2 + 2 \varphi(a) a' + \psi(a) \qquad [f(a) > 0];$$

donc la transformée de l'intégrale des forces vives du problème proposé est

$$f(a)a'^2 - \psi(a) = k \qquad [f(a) > 0].$$

Donc :

Lorsqu'on se trouve dans le cas régulier d'intégration par quadratures, le paramètre principal est toujours déterminé par une équation de la forme

$$a'^2 = \mathrm{F}(a),$$

la fonction F *étant obtenue comme quotient de deux fonctions* $\psi(a) + k$ *et* $f(a)$ *dont la seconde est essentiellement positive, de sorte que la discussion du signe de* F *se réduit à celle du signe de* $\psi + k$.

5. Les résultats que j'ai donnés dans un article précédent sur les intégrales de quantités de mouvement ([1]) permettent, dans bien des cas, de reconnaître *a priori* si un problème de mouvement de système holonome est dans le cas régulier d'intégration par quadratures.

Une intégrale de quantité de mouvement s'exprime d'une façon simple au moyen de la force vive vraie, de sorte que, si cette intégrale est obtenue sous forme immédiate, c'est forcément au moyen de cette force vive vraie ou, quand il y a une fonction génératrice, au moyen de la fonction génératrice primitive, celle qui a pour expression

$$\mathrm{T} + \mathrm{U}.$$

Les intégrales de quantités de mouvement des caté-

([1]) *Voir* le numéro de mai 1912 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

gories T, R, R′, E, E′ s'aperçoivent sans aucun calcul et c'est aussi sans calcul qu'on reconnaît si elles forment un groupe normal.

Supposons alors qu'un problème de mouvement de système holonome à n paramètres remplisse les conditions suivantes :

1° *Il admet l'intégrale ordinaire des forces vives;*

2° *Il admet* $n-1$ *intégrales de quantités de mouvement des catégories* T, R, R′, E, E′;

3° *Ces* $n-1$ *intégrales de quantités de mouvement forment un groupe normal*,

Qui, toutes, sont vérifiables sans calculs à la seule pection des liaisons et des forces données.

Prenons les paramètres indiqués par les intégrales du groupe normal et employons la fonction génératrice primitive, elle sera indépendante du temps et donnera $n-1$ intégrales immédiates qui seront précisément celles du groupe normal, de sorte qu'on sera dans le cas régulier d'intégration par quadratures. Comme application, nous pourrons citer les problèmes classiques suivants :

Solide homogène pesant de révolution fixé par un point de son axe $n=3$: on a l'intégrale ordinaire des forces vives, l'intégrale R pour la verticale et l'intégrale E pour l'axe de révolution; or un groupe R, E est toujours normal, donc on est dans le cas régulier d'intégration par quadratures;

Solide homogène pesant de révolution glissant sur un plan horizontal $n=5$: on a l'intégrale ordinaire des forces vives, les intégrales T pour deux horizontales fixes, l'intégrale R pour une verticale fixe quelconque, l'intégrale R′ pour la verticale du centre de gravité et enfin l'intégrale E' pour l'axe de révolution. L'intégrale R ne peut exister dans un groupe normal avec des intégrales T perpendiculaires. Si donc on employait l'intégrale R, elle ne pourrait fournir un groupe normal qu'avec R' et E' et ce groupe n'aurait que trois intégrales. Supprimons cette intégrale R et considérons toutes les autres

$$T, \quad T, \quad R', \quad E',$$

elles forment un groupe normal de $n - 1 = 4$ intégrales; donc on est dans le cas régulier d'intégration.

Dans cet exemple, on a plus d'intégrales de quantités de mouvement qu'il n'est nécessaire et l'on voit celles qu'il faut choisir pour avoir l'intégration régulière.

6. Nous avons supposé que le problème admettait l'intégrale *ordinaire* des forces vives, parce que c'est, en général, la seule intégrale des forces vives qui soit visible *a priori*. Cependant, il arrive fréquemment, dans le cas de liaisons dépendant du temps, que, sans faire le calcul effectif de T et de U, on reconnaît que ce calcul conduit à des fonctions indépendantes de t; si alors on possède un groupe normal d'ordre convenable d'intégrales T, R, R', E, E', on est sûr d'être dans le cas régulier d'intégration par quadratures. Voici une propriété bien simple qui donne des exemples de ce cas :

Soit $\mathfrak{P}$ un problème de mouvement de système holonome, à liaisons indépendantes du temps, qui se trouve dans le cas régulier d'intégration par quadratures, et soit $\mathfrak{P}'$ le problème qu'on déduit de $\mathfrak{P}$ en conservant les mêmes forces données, mais en ajoutant de nouvelles liaisons se traduisant par *des relations linéaires et à coefficients constants entre les paramètres secondaires et le temps. Le problème $\mathfrak{P}'$ est aussi dans le cas régulier d'intégration par quadratures.*

Soient b_1, $b_2, \ldots$ les paramètres secondaires du problème $\mathfrak{P}$; effectuons, sur ces paramètres, un changement linéaire à coefficients constants

$$b_1 = \lambda_1^1 c_1 + \lambda_2^1 c_2 + \ldots + \mu^1,$$
$$b_2 = \lambda_1^2 c_2 + \lambda_2^2 c_2 + \ldots + \mu^2,$$

qui permettra d'exprimer les b' en fonction des c' sans que les c y figurent. Si l'on porte ces valeurs des b' dans la fonction génératrice primitive G indépendante des b et de t, elle deviendra fonction de a, de a' (a paramètre principal), des c' et indépendante des c et de t, de sorte qu'avec les nouveaux paramètres c on aura encore l'intégration régulière par quadratures.

Nous pouvons déterminer ce changement de paramètres secondaires de façon que les nouvelles liaisons se traduisent par

$$c_r = v_r t + \sigma_r, \qquad c_{r+1} = v_{r+1} t + \sigma_{r+1}, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire par

$$c'_r = v_r, \qquad c'_{r+1} = v_{r+1}, \qquad \ldots.$$

On obtiendra donc la fonction G' du problème $\mathfrak{P}'$ en partant de G et y remplaçant les c'_r, c'_{r+1}, ... par des constantes données à l'avance. Cette fonction G' ne sera plus homogène, en général, par rapport aux dérivées des paramètres restants a, c_1, c_2, ..., c_{r-1}, mais elle sera évidemment indépendante de t et de c_1, c_2, ..., c_{r-1}, de sorte qu'on aura bien l'intégration régulière pour le problème $\mathfrak{P}'$.

Reprenons le problème de Lagrange avec le paramètre principal θ et les deux paramètres secondaires ψ et φ, nous aurons encore l'intégration régulière si nous introduisons la nouvelle liaison

$$\psi = \omega t,$$

de sorte que le problème « mouvement d'un solide homogène pesant de révolution dont l'axe a un point fixe et est assujetti à tourner avec une vitesse constante donnée autour de la verticale de ce point » est certainement dans le cas régulier d'intégration par quadratures, l'intégrale des forces vives étant l'intégrale de M. Painlevé et non l'intégrale ordinaire.

Considérons, comme autre exemple, un point pesant mobile sur un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical. On a évidemment l'intégration régulière. Soient Δ une génératrice variable de l'un des deux systèmes, A le point où elle rencontre l'équateur. On peut définir la position du point M, au moyen de la génératrice variable Δ qui y passe, par la distance MA qui sera le paramètre principal et par l'angle au centre qui fixe la position de A sur le cercle équatorial, angle qui sera forcément le paramètre secondaire, puisque c'est sa variation qui donne la rotation autour de la verticale. Si donc on introduit la nouvelle liaison obligeant cet angle à varier d'une façon uniforme, on aura encore l'intégration régulière avec une intégrale de M. Painlevé. Ainsi le problème « mouvement d'un point pesant sur une droite tournant d'un mouvement uniforme donné autour d'une verticale fixe » est certainement dans le cas régulier d'intégration par quadratures.

7. Pour terminer, faisons quelques remarques rela-

tives au nombre maximum de paramètres des problèmes dont on est assuré *a priori* de pouvoir faire l'intégration par quadratures.

Nous avons vu qu'un groupe normal d'intégrales T, R, R′, E, E′ était d'ordre maximum 5. Il en résulte immédiatement :

Le cas régulier d'intégration par quadratures ne peut être visible a priori *que pour des systèmes ayant, au plus, six paramètres.*

Si l'on tient compte de ce que le groupe normal d'ordre 5 ne peut être obtenu que dans le cas du solide dont l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution, on voit que :

Le cas $n = 6$ d'intégration régulière par quadratures ne peut se présenter a priori *que pour un solide entièrement libre dont l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution.*

Un système matériel ayant un point fixe et qui n'est pas un solide dont l'ellipsoïde de ce point serait de révolution ne peut fournir de groupe normal d'ordre supérieur à *un*. Si on laisse de côté les systèmes de ce genre ne dépendant que d'un paramètre, problèmes dont l'intégration est fournie par la seule intégrale des forces vives, on voit que c'est seulement dans le cas $n = 2$ qu'on peut reconnaître *a priori* si l'on a l'intégration régulière. C'est le cas le plus défavorable. Par exemple, le mouvement d'un solide ayant un point fixe autour duquel il peut librement tourner ($n = 3$) n'est jamais dans le cas régulier, à moins que l'ellipsoïde du point fixe ne soit de révolution, car alors on peut avoir un groupe normal d'ordre 2 par suite de l'existence possible d'une intégrale E.