Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1912)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 469-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__469_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1912).

Composition de Mathématiques élémentaires.

I. *Un contour quadrangulaire gauche* ABCDA *étant circonscrit à une sphère* (S) *de centre* S, *aux points* M, N, P, Q, *on a, en orientant les tangentes* m, n, p, q *de* A *vers* B, *de* B *vers* C, ...,

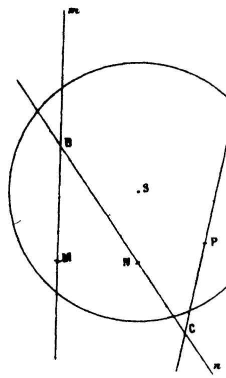
$$\alpha\overline{AM} = \overline{AQ}, \qquad \beta\overline{BN} = \overline{BM}, \qquad \gamma\overline{CP} = \overline{CN}, \qquad \delta\overline{DQ} = \overline{DP},$$
$$\alpha = \mp 1, \qquad \beta = \mp 1, \qquad \ldots;$$

cela conduit à prévoir deux cas distincts : dans l'un des cas, le contour ABCDA *n'est pas quelconque, et l'on a*

$$\alpha + \beta . b + \beta\gamma . c + \beta\gamma\delta . d = 0,$$

a, b, c, d *étant les longueurs des côtés; dans l'autre cas, on indiquera une propriété des deux plans* MPN *et* MPQ, *par exemple.*

II. *On suppose donnée la sphère* S. *Soient* m *et* p *deux droites fixes tangentes à cette sphère aux points* M *et* P. *On considère les droites* m *qui s'appuient sur les droites* m *et* p *(points d'appui* B *et* C*) et qui sont tangentes à la sphère (point de contact* N*). Ces droites forment deux systèmes* (n) *et* (n'); *on déterminera les surfaces* (Σ) *et* (Σ') *dont elles sont* *les génératrices, les courbes* (Γ) *et* (Γ') *qui sont les lieux des points* N *et* N'; *on introduira, si l'on*



veut, l'enveloppe des plans (S, *n*) *et celle des plans* (S, *n'*). *Que peut-on dire des tangentes en* M *et* P *aux deux courbes* (Γ) *et* (Γ')? — *Application aux contours du paragraphe* I.

III. *On suppose maintenant donné le contour* ABCDA, *et l'on cherche les sphères* (S) *tangentes aux quatre côtés.*

On examinera d'abord le cas où l'on veut avoir une sphère (S) *avec points de contact dans un même plan; on montrera* a priori *que, si une telle sphère existe, il doit en exister une infinité. On établira rigoureusement ce fait en projetant, par exemple, la figure sur un plan convenable; on fera connaître le lieu des centres des sphères en question; on indiquera la sphère de plus petit rayon. Quelle est l'enveloppe des sphères* (S)?

On examinera en second lieu le cas où l'on demande une sphère (S) *avec points de contact non dans un même plan. On traitera la question par le* *calcul, en posant*

$$\overline{\mathrm{AM}} = x, \qquad \overline{\mathrm{BN}} = y, \qquad \overline{\mathrm{CP}} = z, \qquad \overline{\mathrm{DQ}} = t;$$

on fera voir que, pour chaque système de valeurs des inconnues, on a bien une sphère (S). *On classera les solutions en quatre groupes* (1 *et* 1′), (2 *et* 2′), ...

Dans le cas où il existe une série continue de sphères (S), *avec points de contact dans un même plan, que deviennent les solutions isolées, avec points de contact non assujettis à être dans un même plan? Certaines de ces solutions isolées font-elles partie de la série continue de solutions?*

Remarque. — *Soient a, b, c, d les plans perpendiculaires aux plans des angles* A, B, C, D, *menés par les bissectrices de ces angles, et a', b', c', d' les plans analogues menés par les bissectrices des angles extérieurs; on pourra indiquer rapidement le rôle de ces plans au paragraphe* III, *d'abord dans chacune des deux hypothèses $a - b + c - d = 0$, $a + b - c - d = 0$, puis, dans le cas d'un contour quelconque, en considérant, par exemple, les solutions* (1 *et* 1′); *on reviendra sur le résultat obtenu à la fin du paragraphe* III. *Dans les figures qui accompagneront le texte on représentera le plan a par la bissectrice de l'angle* A, ...

Composition de Mathématiques spéciales.

I. *Si, dans une équation du troisième degré*

$$z^3 - p_1 z^2 + p_2 z - p_3 = 0, \tag{1}$$

le coefficient p_1 est nul, la fonction

$$z_1^2 - z_2 z_3 = z_2^2 + z_2 z_3 + z_3^2$$

non symétrique par rapport aux lettres est équivalente à une fonction symétrique des racines de l'équation. Le cas où $p_1 = 0$ est-il le seul où il existe un polynome homogène du second degré à trois variables qui jouisse de la même propriété?

Le coefficient p_1 n'étant pas nul, former l'équation (2) *qui a pour racines les valeurs que prend la fonction $x^2 + xy + y^2$ quand on y remplace x et y par deux racines quelconques de l'équation* (1). *L'équation* (2) *peut-elle être équivalente à l'équation* (1) *dont on l'a déduite?*

II. *Les médianes d'un triangle* ABC *se coupant en un point* O, *on fait tourner ce triangle de* 60° *autour de* O *dans un sens et dans l'autre; on obtient ainsi deux nouvelles positions* $A'B'C'$, $A''B''C''$ *du triangle* (A' *et* A'' *étant les nouvelles positions du point* A). *Soient* A'_1, A''_1 *les milieux de* BA', BA''; B'_1, B''_1 *les milieux de* CB', CB''; C'_1, C''_1 *les milieux de* AC', AC''; A'_2, A''_2 *les milieux de* CA', CA''; B'_2, B''_2 *les milieux de* AB', AB''; C'_2, C''_2 *les milieux de* BC', BC''. *Montrer que les angles* $A'_1OA''_1$, $A'_2OA''_2$, $B'_1OB''_1$, $B'_2OB''_2$, $C'_1OC''_1$, $C'_2OC''_2$ *ont même bissectrice et qu'il existe sur cette bissectrice deux points* ω', ω'' *symétriques par rapport à* O, *tels que les quadrilatères* $\omega'\omega''A'_1A''_1$, $\omega'\omega''A'_2A''_2$, $\omega'\omega''B'_1B''_1$, ... *soient inscriptibles.*

Démontrer qu'il existe un triangle $A_1B_1C_1$ *homothétique du triangle* ABC *par rapport à* O *et tel que, si l'on prend les inverses* A_2, B_2, C_2 *des sommets* A_1, B_1, C_1, *le pôle d'inversion étant soit* ω', *soit* ω'', *le centre des moyennes distances des points* A_2, B_2, C_2 *est soit* ω', *soit* ω''.

(*On pourra représenter les différents points par* *leurs affixes, rapportées à un système d'axes rectangulaires ayant* O *pour origine, et utiliser la propriété indiquée au n°* I.)

III. *On considère les triangles* ABC *variables, tels que les points* ω', ω'' *qui leur correspondent soient fixes et pour lesquels le produit des longueurs des médianes est donné. Trouver le lieu des sommets de ces triangles.* (*On pourra se borner à construire ce lieu dans le cas où les données sont telles que l'un des triangles* ABC *ait deux sommets confondus.*)

Étant donné un point A *du lieu, construire le triangle* ABC *qui lui correspond.*

Composition sur le Calcul différentiel et intégral.

Les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on donne un cercle* (γ), *d'axe* Oz *de rayon* r *et de cote* $z = h$.

Par un point arbitraire M *du cercle* (γ) *on mène un plan, tangent à ce cercle et dont la position dépend uniquement de la position du point* M *sur ce cercle. Lorsque le point* M *décrit le cercle* (γ), *ce plan enveloppe une surface développable* (S) *dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, soit* ω.

1° *Déterminer la surface* (S) *et la courbe* (C) *section de cette surface par le plan* xOy.

2° *Comment doit-on choisir la fonction* ω *pour que la courbe* (C) *coïncide avec une courbe donnée* (C_1) *définie par son équation cartésienne?*

Montrer que la représentation est possible d'un nombre limité de manières et indiquer à quelles surfaces (S) *correspondent les autres solutions de l'équation différentielle déterminant* ω.

Y a-t-il des courbes (C_1) *exceptionnelles pour lesquelles la représentation par une courbe* (C) *est impossible?*

3° *Comment appliquera-t-on la représentation précédente d'une courbe plane à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire?*

Y a-t-il des équations différentielles exceptionnelles?

Intégrer l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2.$$

Comment peut-on découper, dans le plan xOy, *les courbes intégrales, par déplacement et déformation d'une surface développable* (S)?

Indiquer : des équations du premier ou du second ordre dont l'intégration se ramène aux quadratures, des équations du second ordre dont l'intégrale générale peut être découpée dans le plan xOy *en utilisant le procédé mis en évidence pour l'équation précédente.*

4° *On considère une famille de développables* (S) *dépendant d'un paramètre et sur chacune de ces développables on choisit une courbe déterminée* (σ). *Les courbes* (σ) *engendrent une surface* (Σ) *qu'on peut représenter par les coordonnées de l'un de ses points exprimées à l'aide de deux paramètres.*

Inversement, étant donnée une surface (Σ_1) *par son équation cartésienne, peut-on la représenter de la façon précédente?*

5° *Former l'équation aux dérivées partielles* (E) *déterminant les surfaces orthogonales à une famille donnée et à un paramètre de développables* (S).

6° *Déterminer les développables* (S) *et intégrer* *l'équation* (E), *lorsque cette équation* (E) *admet comme solution particulière la surface* (Σ_2), *lieu des arêtes de rebroussement des développables* (S).

La surface (Σ_2) *appartient-elle à l'intégrale générale?*

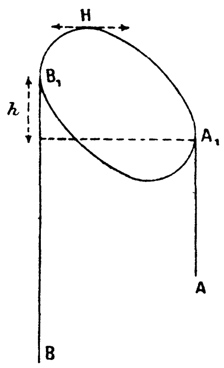
Existe-t-il des surfaces normales aux génératrices des développables (S)? *Le calcul met-il en évidence la génération de ces surfaces en partant de l'une d'entre elles?*

Composition sur la Mécanique.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CABLE A CHEVAL SUR UNE POUTRE.

Un câble pesant flexible et inextensible est à cheval sur une poutre cylindrique horizontale fixe, le long d'une section droite S *supposée convexe.*

Notations. — *On appellera* H *le point le plus haut*



de S, A_1, B_1 *les deux points de* S *à tangente verticale*, B_1 *étant au moins aussi haut que* A_1.

On choisira pour origine des abscisses curvilignes s *sur* S *le point* A_1, *le sens positif étant le sens de* A_1HB_1. *On prendra une verticale ascendante* *comme axe des y et une horizontale orientée dans le sens de la demi-normale extérieure en* A_1 *comme axe des x. L'angle que fait la demi-normale extérieure à* S *en un point* M *de l'arc* A_1HB_1, *avec* Ox, *sera désigné par* φ *et le rayon de courbure correspondant par r. La relation entre* φ *et l'abscisse curviligne* $s = \overset{\frown}{A_1M}$ *sera représentée par l'équation* $s = a(\varphi)$. *On appellera* T *la valeur absolue de la tension en un point du câble et* N *celle de la réaction de la poutre sur l'unité de longueur du câble, au même point.*

Données. — *On connaît la longueur l de l'arc* $\overset{\frown}{A_1HB_1}$, *la longueur* L *du câble, son poids p par unité de longueur, enfin la hauteur* $h(\geqq 0)$ *de* B_1 *au-dessus de* A_1. *On suppose la hauteur de* A_1 *au-dessus du sol supérieure à* L, *de sorte qu'on n'aura pas à s'inquiéter du choc sur le sol dans le problème dont l'énoncé suit.*

PROBLÈME.

I. On négligera d'abord le frottement du câble sur la poutre.

1° *On étudiera l'équilibre du câble et sa stabilité.*

2° *En négligeant la résistance de l'air, en supposant qu'à l'instant initial tous les points du câble et leurs vitesses sont dans un même plan vertical et que toute portion libre du câble est verticale et animée d'une vitesse verticale, on montrera que la loi du mouvement s'obtient par des quadratures. On indiquera les principales circonstances qui peuvent se présenter suivant les données initiales.*

En particulier, on déterminera la vitesse que possède le câble au moment où il quitte la poutre, en supposant la vitesse initiale nulle.

On calculera cette vitesse à un décimètre près par seconde en supposant que S *est une circonférence de* périmètre *égal à* 1^m *et qu'à l'instant initial le câble a deux portions libres* $AA_1 = l$, $BB_1 = 3l$.

II. On reprendra ensuite la question de l'équilibre en tenant compte du frottement du câble sur la poutre ($f = \tang\theta$ *étant le coefficient du frottement*).

On se contentera d'étudier l'équilibre limite du câble dans le cas où L *est supérieur à* l *et de rechercher, suivant les valeurs de* L, *si dans une position d'équilibre le câble a un ou deux brins libres.* (*On pourra simplifier en se bornant au cas où* S *est un cercle.*)

En particulier on indiquera si, dans l'application numérique proposée plus haut, le mouvement peut avoir lieu quand f, *au lieu d'être négligeable, est égal à* $\frac{1}{2}$.