Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

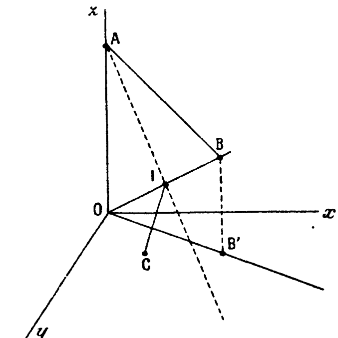
Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 477-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__477_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soit le trièdre trirectangle* $Oxyz$,



dont l'axe des z *est vertical et dirigé vers le haut. Une* *tige rectiligne* OB, *homogène, de masse* $2m$ *et de longueur* $2a$, *est fixée en* O, *d'une part, et attachée en* B, *d'autre part, à un fil* AB, *de longueur* $2a$, *dont l'autre extrémité est fixée en* A, *à la hauteur* $2a$ *au-dessus de* O.

Une seconde tige IC, *de masse* m *et de longueur* a, *est articulée perpendiculairement à la première au milieu* I *de* OB. *Elle peut tourner sans frottement autour de* OB.

On appelle ψ *l'angle de* Ox *avec la projection horizontale* OB' *de* OB *et* φ *l'angle (mesuré autour de* OB) *que fait le prolongement de* AI *avec* IC :

1° *Le système étant lancé dans des conditions initiales quelconques, trouver les équations du mouvement. Montrer qu'on peut avoir* φ *et* ψ *en fonction de* t *par des quadratures;*

2° *Calculer la tension du fil* AB;

3° *On abandonne le système sans vitesse initiale à partir d'une position quelconque. Étudier le mouvement dans ce cas;*

4° *On suppose les conditions précédentes, mais* φ_0 *étant infiniment petit principal. Trouver les parties principales de* φ *et* ψ. *Calculer la valeur de la tension, au troisième ordre près.*

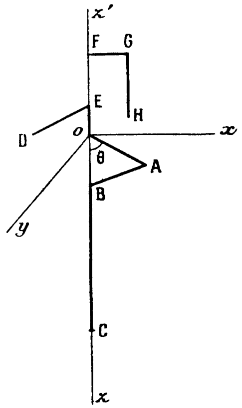
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une sphère homogène, creuse, d'épaisseur négligeable, de masse* 100^{g}, *de rayon* 10^{cm}, *est attachée à un fil de* 90^{cm} *de long et de masse négligeable. Quand la sphère se déplace dans l'air, elle éprouve une résistance qu'on suppose réduite à une force unique appliquée en son centre, en sens inverse de la vitesse* v *de celui-ci, et égale, en unités C.G.S., à* $\frac{Sv^2}{10000}$, *en appelant* S *la surface totale de la sphère :*

1° *On écarte la sphère de sa position d'équilibre d'un angle* $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ *et on l'abandonne sans vitesse initiale. Former l'équation qui donne l'angle* θ_1 *dont remonte la sphère au bout de la première oscillation simple. Prouver que* $\theta_1 < \theta_0$;

2° *On suppose* θ_0 *infiniment petit principal. Calculer la partie principale de la différence* $\theta_0 - \theta_1$. *En supposant l'écart initial du point le plus bas de la sphère égal à* 10^{cm}, *calculer approximativement l'écart suivant.*

(Juillet 1911.)

Epreuve théorique. — *Dans le système indiqué par la figure*, DEOABC *est un ensemble de tiges rectilignes homogènes, d'épaisseur négligeable et de densité linéaire égale à* 1. *Leurs dimensions sont indiquées ci-contre. Les tiges* DE *et* EO *sont solidaires l'une de l'autre; elles peuvent tourner autour de l'axe vertical* $z'Oz$ (Oz *vers le*



bas), qui traverse la tige OE, *supposée creuse;* OA *est articulée en* O *avec* EO *suivant un axe horizontal invariablement lié à* DEO. *En* A *et* B, *on a des articulations parallèles à la précédente. Enfin*, BE *est assujettie à glisser le long de* Oz *et peut, en outre, pivoter sur elle-même :*

1° *On amène* B *en* O; *on imprime à* DE *une vitesse angulaire* ω *au moment précis où l'on abandonne* BC. *Trouver le mouvement du système. Valeurs de* ω *pour lesquelles* A *traverse* Oz;

2° *On lance encore* DE *avec une vitesse angulaire* ω *infiniment petite; mais la position initiale de* A *est infiniment voisine de* Oz. *Montrer que* A *reste voisin de* Oz. *Équations des petits mouvements;*

3° *On introduit maintenant la tige coudée* FGH, *qui peut tourner autour de* Oz, *indépendamment du système* (S) *précédent;* FG *est horizontale et* GH *verticale; en outre, elles ont encore une densité linéaire égale à* 1. *Ceci étant, on place* FGH *dans un azimut quelconque. Puis on* *lance* (S) *comme dans* (1°). *Au bout d'un certain temps*, ED *rencontre* GH. *Il se produit une percussion, pendant laquelle on suppose que les deux tiges restent en contact. Calculer les vitesses après le choc;*

4° *Étudier brièvement le mouvement après le choc. Quand les deux tiges se séparent-elles? Montrer que la vitesse angulaire, pour une valeur donnée de* θ *et pour le mouvement actuel, est, avec la vitesse correspondante du mouvement de* (1°), *dans un rapport plus petit que* 1 *et qui ne dépend que de* θ. *Prouver que* B *ne revient jamais en* O.

N.-B. — *On fera abstraction des frottements.*

Épreuve pratique. — *Un fil élastique, dont la longueur naturelle est* $2l$, *est coupé en deux parties égales. On fixe chacune de celles-ci, par une extrémité, à une petite sphère* M, *pesant* 10^g *et assimilable à un point matériel. Les deux autres bouts sont attachés à deux clous* A *et* B *fixés dans une planche mobile et distants de* 1^m. *Enfin, la tension de chaque fil est* $k.\Delta r$, Δr *désignant l'allongement du fil à partir de* l :

1° *On place* AB *verticalement*, A *en haut;* M *prend une position d'équilibre située à* 60^{cm} *au-dessous de* A. *En déduire le coefficient* k;

2° *On place* AB *horizontalement;* M *prend une position d'équilibre située à* 20^{cm} *au-dessous de* AB. *En déduire* l;

3° *On place* AB *comme dans* (1°) *et l'on abandonne* M *sans vitesse initiale à partir d'une position* M_1 *située à* 40^{cm} *au-dessous de* A. *La sphère tombe jusqu'en* M_2. *Calculer* AM_2 *et la durée de la chute;*

4° *On place* AB *horizontalement et l'on abandonne* M *sans vitesse initiale à partir du milieu de* AB. *Calculer la hauteur dont tombe la sphère.*

N.-B. — *Les distances seront calculées à* 1^{cm} *près et les temps à* 1^s *près.* (Novembre 1911.)