NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉT. DELASSUS

Sur le calcul de la force vive d'un système matériel

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 529-533

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__529_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[R8a]

SUR LE CALCUL DE LA FORCE VIVE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL;

PAR M. ÉT. DELASSUS,

1. La méthode classique de Gilbert pour former les équations de Lagrange, dans le cas où le trièdre de référence est mobile, repose sur la considération de forces fictives et, au lieu de calculer la force vive du système, on calcule une certaine force vive d'entraînement et un certain travail donnant lieu à une fonction de force généralisée, c'est-à-dire dépendant de t. Si l'on reprend les notations adoptées par M. Appell, on a les équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q+\frac{\partial K}{\partial q}$$

ou, puisque K ne dépend pas des q',

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T+K)}{\partial q'}\right]-\frac{\partial(T+K)}{\partial q}=Q,$$

c'est-à-dire les équations de Lagrange qu'on aurait obtenues si l'on avait calculé la force vive absolue du système. Il en résulte que *la fonction* $T+K$ *est une force vive équivalente à la force vive vraie du système matériel* ([1]).

2. Il est facile de voir que le calcul direct de la force

([1]) Voir mon article *Sur les forces vives équivalentes* (*Nouvelles Annales*, 1912).

vive absolue conduit immédiatement aux équations de Gilbert si l'on utilise cette notion de forces vives équivalentes.

Soient T_1 un trièdre fixe, T un trièdre mobile et T_2 un trièdre auxiliaire ayant la direction fixe de T_1 et l'origine mobile de T.

Soient ω et V les éléments de réduction en O (origine de T) de la vitesse du trièdre T.

La vitesse relative de T par rapport à T_2 est la rotation ω et la vitesse absolue de T_2 est la translation V.

Soient v_1, v, v_2, les vitesses d'un point quelconque par rapport aux trois trièdres et v' sa vitesse par rapport à T_2 quand on le considère comme attaché à T. On a les deux égalités géométriques

$$v_1 = V + v_2,$$
$$v_2 = v' + v,$$

d'où l'on déduit les deux égalités algébriques

$$v_1^2 = V^2 + 2 V v_2 \cos(V, v_2) + v_2^2,$$
$$v_2^2 = v'^2 + 2 v' v \cos(v', v) + v^2,$$

et, par addition, multiplication par m, puis sommation pour tout le système

$$\Sigma m v_1^2 = MV^2 + \Sigma m v^2 + \Sigma m v'^2$$
$$+ 2 \Sigma m v' v \cos(v', v) + 2 V \Sigma m v_2 \cos(V, v_2),$$
$$T = T_0 + T_r + \mathcal{G} + \mathcal{V} + K.$$

3. Les cinq termes précédents ont des interprétations immédiates :

$2\,T_0$ est la force vive de l'origine mobile,

$2\,T_r$ est la force vive relative du système,

$2\,G$ est la force vive d'entraînement produite par la rotation ω. C'est donc

$$I_\omega \omega^2,$$

$I\omega$ étant le moment d'inertie par rapport à la droite ω, $\mathfrak{V}$ s'interprète comme il suit. On a

$$v_e = \mathrm{M}_{\mathrm{M}}^t\,\omega,$$

on le projette sur la quantité de mouvement relatif mv de ce point et l'on multiplie par mv. On a ainsi le moment de ω et de mv et en faisant la somme on a

$$\mathfrak{V} = \mathrm{M}^t(\omega, \mathrm{Q}_r),$$

Q_r étant la quantité de mouvement relatif.

Pour obtenir l'expression de K, on remarque que $mv_2 \cos(\mathrm{V}, v_2)$ est la projection sur V de la quantité de mouvement mv_2 de sorte que la somme qui figure dans K est la projection sur V de la résultante générale de la quantité de mouvement par rapport à T_2, c'est-à-dire de la quantité de mouvement analogue du centre de gravité. Si donc nous désignons par V_2 la vitesse relative de ce centre de gravité dans le trièdre T_2 on aura

$$\mathrm{K} = \mathrm{MVV}_2 \cos(\mathrm{V}, \mathrm{V}_2).$$

4. Soient a, b, c, λ, μ, ν les coordonnées du centre de gravité et les composantes de V dans le trièdre T_2. On a, d'après l'expression précédente de K,

$$\begin{aligned}\mathrm{K} &= \mathrm{M}(\lambda a' + \mu b' + \nu c')\\ &= \frac{d}{dt}[\mathrm{M}(\lambda a + \mu b + \nu c)] - \mathrm{M}(\lambda' a + \mu' b + \nu' c).\end{aligned}$$

Soient L le vecteur OG et J l'accélération du point O. On pourra alors écrire

$$\mathrm{K} = \frac{d}{dt}[\mathrm{MVL}\cos(\mathrm{V}, \mathrm{L})] - \mathrm{MJL}\cos(\mathrm{J}, \mathrm{L}).$$

5. En général, les composantes λ, μ, ν de V dépen-

dent des q et des q'. Plaçons-nous dans le cas particulier où s'applique la méthode de Gilbert, c'est-à-dire : *supposons que l'origine des axes mobiles soit animée d'un mouvement donné à l'avance*. Les composantes λ, μ, ν sont alors des fonctions données de t, et comme a, b, c ne dépendent que de la position du système, c'est-à-dire des q et de t, mais pas des q', on voit que l'on a

$$\mathrm{MVL}\cos(\mathrm{V}, \mathrm{L}) = f(q_1, \ldots, q_n, t),$$

le premier terme de K étant alors la dérivée totale d'une fonction des paramètres et du temps, on peut le supprimer ainsi que le terme T_0 qui est ici une fonction donnée de t et l'on obtient ainsi *la force vive :*

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_r + \mathcal{G} + \mathcal{Q} + \mathrm{K}',$$
$$\mathrm{K}' = -\,\mathrm{MJL}\cos(\mathrm{J}, \mathrm{L})$$

qui est équivalente à la force vive vraie et qui n'est autre que celle qui figure en réalité dans les équations de Gilbert.

6. Il est à remarquer que le calcul précédent donne, comme cas particuliers, les méthodes ordinaires de calcul de la force vive.

Si l'on suppose que le trièdre T a pour origine le centre de gravité G et a une direction fixe, ω et V_2 sont nulles, de sorte que $\mathcal{G}$, $\mathcal{Q}$ et K sont nuls et que la formule se réduit à

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_r,$$

ce qui constitue le théorème classique de König.

Si le système est un solide et si le trièdre T lui est attaché, T_r et Q_r sont nulles, donc aussi $\mathcal{Q}$ et la formule se réduit à

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \frac{1}{2}\omega^2 \mathrm{I}_\omega + \mathrm{K}.$$

Si l'origine est le centre de gravité, V_2, donc aussi K, est nulle et l'on retrouve le calcul de la force vive d'un solide au moyen de l'ellipsoïde central d'inertie.

Si le solide a un point fixe, qu'on prend comme origine du trièdre attaché à ce solide, T_0 est nulle ainsi que K, puisque V est nulle, et il reste

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 I_\omega,$$

ce qui ramène au calcul de la force vive au moyen de l'ellipsoïde d'inertie du point fixe.