NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 12 (1912), p. 539-541

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__539_1>

[A3k]

ÉQUATION AUX RAPPORTS ANHARMONIQUES DES RACINES D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette équation a été donnée par Painvin (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. XIX, p. 407, et *Principes de Géométrie analytique*, t. I, p. 111). Painvin l'a obtenue par un calcul direct, assez pénible; la connaissance du résultat permet d'y arriver avec fort peu de calcul.

Si l'on considère l'une des six valeurs en question, son inverse et son complément à 1 sont également au nombre des valeurs en question ; les six valeurs sont

$$(1)\qquad r,\quad 1-r,\quad \frac{1}{1-r},\quad \frac{r}{r-1},\quad \frac{r-1}{r},\quad \frac{1}{r}.$$

Considérons deux cas particuliers.

1° Si l'une des valeurs est -1, les six valeurs sont

$$-1,\quad 2,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad 2,\quad -1;$$

ce sont les racines de l'équation

$$(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

2° Si deux des trois termes de rang impair dans la suite (1) sont égaux, les trois le sont, les trois rapports de rang pair sont aussi égaux, et l'on a l'équation

$$(r^2-r+1)^3=0.$$

Si l'on observe que l'équation aux valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités doit dépendre d'un seul paramètre, on voit que cette équation est de la forme

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3}=H;$$

en effet, cette équation ne change pas si l'on remplace r par $\frac{1}{r}$ ou par $1-r$.

Si a, b, c, d sont les racines de l'équation

$$Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4Dx+E=0,$$

en posant

$$S = AE - 4BD + 3C^2, \qquad T = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix},$$

on trouve facilement que les hypothèses $r = 1$, $r^2 - r + 1 = 0$ correspondent aux relations $T = 0$, $S = 0$. On peut donc écrire

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = \left(k\frac{T^2}{S^3}\right)^n.$$

Pour $S^3 = 27T^2$, deux des quantités a, b, c, d sont égales, les valeurs de r sont $0, 0, \infty, \infty, 1, 1$, ce qui donne $k = 27$; l'équation devient

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = \left(27\frac{T^2}{S^3}\right)^n.$$

Un exemple numérique donne enfin $n = 1$, et l'on a l'équation

$$S^3(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 = 27T^2(r^2-r+1)^3.$$

Si l'on pose $r + \frac{1}{r} = \rho$, cela donne

$$S^3(\rho+2)\left(\rho-\frac{5}{2}\right)^2 = 27T^2(\rho-1)^3);$$

c'est cette dernière équation que Painvin obtient, sous forme développée ; il la met ensuite sous la forme précédente, en écrivant seulement par inadvertance $\rho + 1$, au lieu de $\rho - 1$.