

G. FONTENÉ

Équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 12 (1912), p. 539-541

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1912_4_12__539_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[A3k]

ÉQUATION AUX RAPPORTS ANHARMONIQUES DES RACINES
D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette équation a été donnée par Painvin (*Nouvelles Annales*, 1^{re} série, t. XIX, p. 407, et *Principes de Géométrie analytique*, t. I, p. 111). Painvin l'a obtenue par un calcul direct, assez pénible; la connaissance

du résultat permet d'y arriver avec fort peu de calcul.

Si l'on considère l'une des six valeurs en question, son inverse et son complément à 1 sont également au nombre des valeurs en question ; les six valeurs sont

$$(1) \quad r, \quad 1-r, \quad \frac{1}{1-r}, \quad \frac{r}{r-1}, \quad \frac{r-1}{r}, \quad \frac{1}{r}.$$

Considérons deux cas particuliers.

1° Si l'une des valeurs est -1 , les six valeurs sont

$$-1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad -1;$$

ce sont les racines de l'équation

$$(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

2° Si deux des trois termes de rang impair dans la suite (1) sont égaux, les trois le sont, les trois rapports de rang pair sont aussi égaux, et l'on a l'équation

$$(r^2-r+1)^3 = 0.$$

Si l'on observe que l'équation aux valeurs des six rapports anharmoniques de quatre quantités doit dépendre d'un seul paramètre, on voit que cette équation est de la forme

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = H;$$

en effet, cette équation ne change pas si l'on remplace r par $\frac{1}{r}$ ou par $1-r$.

Si a, b, c, d sont les racines de l'équation

$$Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

en posant

$$S = AE - 4BD + 3C^2, \quad T = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix},$$

on trouve facilement que les hypothèses $r = 1$, $r^2 - r + 1 = 0$ correspondent aux relations $T = 0$, $S = 0$. On peut donc écrire

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = \left(k \frac{T^2}{S^3}\right)^n.$$

Pour $S^3 = 27 T^2$, deux des quantités a, b, c, d sont égales, les valeurs de r sont $0, 0, \infty, \infty, 1, 1$, ce qui donne $k = 27$; l'équation devient

$$\frac{(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}{(r^2-r+1)^3} = \left(27 \frac{T^2}{S^3}\right)^n.$$

Un exemple numérique donne enfin $n = 1$, et l'on a l'équation

$$S^3(r+1)^2(r-2)^2\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 = 27 T^2(r^2-r+1)^3.$$

Si l'on pose $r + \frac{1}{r} = \rho$, cela donne

$$S^3(\rho + 2)\left(\rho - \frac{5}{2}\right)^2 = 27 T^2(\rho - 1)^3;$$

c'est cette dernière équation que Painvin obtient, sous forme développée; il la met ensuite sous la forme précédente, en écrivant seulement par inadvertance $\rho + 1$, au lieu de $\rho - 1$.